Exercice 1. *Soit $f \in L^\infty([0,1])$. Calculer:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 2. *Calculer et dessiner l'allure des transformées de Log-Laplace et de leur transformée de Légendre des lois suivantes:*

1. *Poisson de paramètre $\mu > 0$.*
2. *Exponentielle de paramètre $\mu > 0$.*
3. *Géométrique de paramètre $p \in (0,1]$.*
4. *Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ sur $\{a,b\}$ (i.e., $p\delta_b + (1-p)\delta_a$).*
5. *Normale de moyenne $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$.*
6. $\mu = e^{-1}\sum_{n>0}\frac{1}{n!}\delta_n$.
7. $\mu(dx) = 1_{[0,\infty)}(x)e^{-x}dx$.

Exercice 3. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et Λ sa tranformée de Log-Laplace. On définie:*

$$\mathcal{D}_\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}; \Lambda(\lambda) < \infty\}.$$

1. *Montrer que si 0 est dans l'intérieur de $\mathcal{D}_\Lambda$, alors Λ^* est une bonne fonction de taux.*
2. *Montrer que si $\mathcal{D}_\Lambda = \mathbb{R}$ alors :*

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\Lambda^*(x)}{|x|} = +\infty.$$

Exercice 4. *Soit E un espace métrique localement compact. Soit $(\mu_n)_{n>0}$ satisfaisant un PGD de bonne fonction de taux I. Montrer que $(\mu_n)_{n>0}$ est exponentiellement tendue, c'est à dire : pour tout réel $\alpha \geq 0$, il existe une partie compacte K de E telle que pour tout $n \geq 1$, $\mu_n(K^c) < e^{-n\alpha}$.*

Exercice 5. *Soit $(Z_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires réelles satisfaisant un PGD de fonction de taux I. Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que pour tout $n \in N^*$:*

$$X_n \perp\!\!\!\perp Z_n \text{ et } \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Y_n = Z_n + X_n$. Montrer que $(Y_n)_{n>0}$ suit un PGD dont on précisera la fonction de taux.

Exercice 6.

Soit (X,d) un espace métrique et $((Z_n, Z'_n))_{n>0}$ des variables aléatoires à valeurs dans $X \times X$. On suppose que :

1. *$(Z_n)_{n>0}$ suit un PGD de bonne fonction de taux I,*

2. *$(Z_n)_{n>0}$ et $(Z'_n)_{n>0}$ sont exponentiellement équivalentes, c'est-à-dire que pour tout $\delta > 0$:*
$$\limsup_{n\to 0} \frac{1}{n} \log P(d(Z_n, Z'_n) > \delta) = -\infty.$$

Montrer que $(Z'_n)_{n>0}$ suit un PGD de bonne fonction de taux I.

Exercice 7. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose :*
$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}.$$

On admettra que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit un PGD de bonne fonction de taux I_μ donnée par [1]:
$$\forall \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}), I_\mu(\nu) = \begin{cases} \int \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \ \text{si } \nu \ll \mu, \\ +\infty \ \text{si non.} \end{cases}$$

1. *Montrer que $U_n = L_n \otimes L_n$ satisfait un PGD dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ dont on donnera la fonction de taux.*

2. *En déduire que pour tout $h \in C_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, la suite de variables aléatoires :*
$$\frac{1}{n^2} \sum_{1\le k_1,k_2 \le n} h(X_{k_1}, X_{k_2}), n > 1$$
satisfait un PGD sur $\mathbb{R}$ dont on donnera la fonction de taux.

3. *Montrer que :*
$$U'_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\le k_1 \ne k_2 \le n} \delta_{X_{k_1}, X_{k_2}}, n > 2$$
satisfait un PGD dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ dont on donnera la fonction de taux. On pourra utiliser l'exercice 6 et la distance de Lévy-Prohorov.

4. *Montrer que pour tout $h \in C_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, la suite de variables aléatoires :*
$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\le k_1 \ne k_2 \le n} h(X_{k_1}, X_{k_2}), n > 2$$
satisfait un PGD sur $\mathbb{R}$ dont on donnera la fonction de taux.

Exercice 8. *Soit (E, d) un espace métrique. Soit $I : E \to [0, +\infty]$ une bonne fonction de taux. Soit $(\mu_n)_{n>1}$ une suite de mesures de probabilités boréliennes sur E qui satisfait un principe de grandes déviations de fonction de taux I. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.*

[1] C'est le théorème de Sanov dans sa version générale.

1. *Soient* $x \in E$ *et* $\delta > 0$. *En considérant la partie* $G = \{y \in E : f(y) > f(x) - \delta\}$, *montrer que*
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_E e^{nf(t)}\, d\mu_n(t) > f(x) - I(x) - \delta.$$

2. *Soient* $\alpha > 0$ *et* $\delta > 0$ *des réels. Notons* $K = \{x \in E : I(x) \leq \alpha\}$. *Montrer qu'il existe un entier* $N > 1$, *des points* $x_1, \dots, x_N$ *de* K *et des réels* $r_1, \dots, r_N > 0$ *tels que :*
   (a) $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall y \in B(x_i, r_i), I(y) > I(x_i) - \delta$ *et* $f(y) < f(x_i) + \delta$.
   (b) $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i)$.

3. *En déduire que*
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_E e^{nf(t)}\, d\mu_n(t) \leq \max\left\{\max_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - I(x_i) + 2\delta\right), \|f\|_\infty - \alpha\right\}.$$

4. *Montrer que la limite*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathbb{R}} e^{nf(x)}\, d\mu_n(x)$$
existe et en donner une expression simple.

Exercice 9.

Soit $N > 1$ *un entier. On se donne une matrice stochastique* $P = (p_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,N\}}$ *qu'on considère comme la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur l'ensemble* $E = \{1, \dots, N\}$. *On suppose que tous les coefficients de* P *sont strictement positifs. On fixe une fois pour toutes un élément* $i_0 \in E$, *et on se donne, sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *une suite* $(X_n)_{n>0}$ *de variables aléatoires à valeurs dans* E *et qui est une chaîne de Markov de matrice de transition* P *issue de* i_0, *ce qui signifie que* $X_0 = i_0$ *presque sûrement et que pour tous* $n > 1$ *et* $i_1, \dots, i_n \in E$, *on a*
$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Pour tout $n > 1$ *et toute suite* $x = (x_0, \dots, x_n)$ *d'éléments de* E, *on définit*
$$\ell_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x_k, x_{k+1}),$$
qui est une mesure de probabilité sur $E \times E = E^2$. *Pour tout* $n > 1$, *on définit*
$$L_n = \ell_n(X_0, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta(X_k, X_{k+1}),$$
qui est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans l'espace* $\mathcal{M}(E^2)$ *des mesures de probabilité sur* E^2.

Montrer que la suite des lois des variables aléatoires $(L_n)_{n>1}$ *satisfait sur* $\mathcal{M}(E^2)$ *un principe de grandes déviations dont on déterminera la fonction de taux. On se permettra de traiter l'approximation* $\log k! \approx k \log k$ *comme une égalité.*

Indications. *L'entier n étant fixé, on pourra introduire l'ensemble*

$$L_n = \{\ell_n(x) : x \in E^{n+1}\} \subset \mathcal{M}(E^2),$$

et pour tout $\nu \in L_n$, l'ensemble

$$T_n(\nu) = \{x \in E^{n+1} : \ell_n(x) = \nu\}.$$

Étant donné $\nu \in L_n$, on pourra poser, pour tous $i, j \in E$, $n_{ij} = n\nu(\{(i,j)\})$, et pour tout $i \in E$, $n_i = n\nu(\{i\} \times E) = \sum_{j \in E} n_{ij}$; et on pourra respectivement admettre et démontrer les inégalités

$$n! \geq \prod_{i \in E} n_i! \quad et \quad \binom{n}{n_{ij}} \leq \frac{n!}{\prod_{i \in E} n_i!}.$$