Exercice 1. *Soit $f \in L^\infty([0,1])$. Calculer:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 2. *Calculer et dessiner l'allure des transformées de Log-Laplace et de leur transformée de Légendre des lois suivantes:*

1. *Poisson de paramètre $\mu > 0$.*
2. *Exponentielle de paramètre $\mu > 0$.*
3. *Géométrique de paramètre $p \in (0,1]$.*
4. *Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ sur $\{a,b\}$ (i.e., $p\delta_b + (1-p)\delta_a$).*
5. *Normale de moyenne $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$.*
6. $\mu = e^{-1}\sum_{n>0}\frac{1}{n!}\delta_n$.
7. $\mu(dx) = 1_{[0,\infty)}(x)e^{-x}dx$.

Exercice 3. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et Λ sa tranformée de Log-Laplace. On définie:*

$$\mathcal{D}_\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}; \Lambda(\lambda) < \infty\}.$$

1. *Montrer que si 0 est dans l'intérieur de $\mathcal{D}_\Lambda$, alors Λ^* est une bonne fonction de taux.*
2. *Montrer que si $\mathcal{D}_\Lambda = \mathbb{R}$ alors :*

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\Lambda^*(x)}{|x|} = +\infty.$$

Exercice 4. *Soit E un espace métrique localement compact. Soit $(\mu_n)_{n>0}$ satisfaisant un PGD de bonne fonction de taux I. Montrer que $(\mu_n)_{n>0}$ est exponentiellement tendue, c'est à dire : pour tout réel $\alpha \geq 0$, il existe une partie compacte K de E telle que pour tout $n \geq 1$, $\mu_n(K^c) < e^{-n\alpha}$.*

Exercice 5. *Soit $(Z_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires réelles satisfaisant un PGD de fonction de taux I. Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que pour tout $n \in N^*$:*

$$X_n \perp\!\!\!\perp Z_n \text{ et } \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Y_n = Z_n + X_n$. Montrer que $(Y_n)_{n>0}$ suit un PGD dont on précisera la fonction de taux.

Exercice 6.

Soit (X,d) un espace métrique et $((Z_n, Z'_n))_{n>0}$ des variables aléatoires à valeurs dans $X \times X$. On suppose que :

1. $(Z_n)_{n>0}$ suit un PGD de bonne fonction de taux I,

2. $(Z_n)_{n>0}$ et $(Z'_n)_{n>0}$ sont exponentiellement équivalentes, c'est-à-dire que pour tout $\delta > 0$:

$$\limsup_{n\to 0} \frac{1}{n} \log P(d(Z_n, Z'_n) > \delta) = -\infty.$$

Montrer que $(Z'_n)_{n>0}$ suit un PGD de bonne fonction de taux I.

Exercice 7.

1. Montrer que l'application $\mu \mapsto \mu \otimes \mu$ de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est continue.

2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}.$$

(a) Montrer que $U_n = L_n \otimes L_n$ satisfait un PGD dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ dont on donnera la fonction de taux.

(b) En déduire que pour tout $h \in C_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, la suite de variables aléatoires :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1\leq k_1,k_2\leq n} h(X_{k_1}, X_{k_2}), n > 1$$

satisfait un PGD sur $\mathbb{R}$ dont on donnera la fonction de taux.

3. Montrer que :

$$U'_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\leq k_1\neq k_2\leq n} \delta_{X_{k_1}, X_{k_2}}, n > 2$$

satisfait un PGD dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ dont on donnera la fonction de taux. On pourra utiliser l'exercice 6 et la distance de Lévy-Prohorov.

4. Montrer que pour tout $h \in C_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, la suite de variables aléatoires :

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\leq k_1\neq k_2\leq n} h(X_{k_1}, X_{k_2}), n > 2$$

satisfait un PGD sur $\mathbb{R}$ dont on donnera la fonction de taux.

Exercice 8. *Soit (E, d) un espace métrique. Soit $I : E \to [0, +\infty]$ une bonne fonction de taux. Soit $(\mu_n)_{n>1}$ une suite de mesures de probabilités boréliennes sur E qui satisfait un principe de grandes déviations de fonction de taux I. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.*

1. Soient $x \in E$ et $\delta > 0$. En considérant la partie $G = \{y \in E : f(y) > f(x) - \delta\}$, montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_E e^{nf(t)}\, d\mu_n(t) > f(x) - I(x) - \delta.$$

2. Soient $\alpha > 0$ et $\delta > 0$ des réels. Notons $K = \{x \in E : I(x) \leq \alpha\}$. Montrer qu'il existe un entier $N > 1$, des points $x_1, \ldots, x_N$ de K et des réels $r_1, \ldots, r_N > 0$ tels que :

(a) $\forall i \in \{1, \ldots, N\}, \forall y \in B(x_i, r_i), I(y) > I(x_i) - \delta$ et $f(y) < f(x_i) + \delta$.

(b) $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i)$.

3. En déduire que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_E e^{nf(t)}\, d\mu_n(t) \leq \max\left\{ \max_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - I(x_i) + 2\delta\right), \|f\|_\infty - \alpha \right\}.$$

4. Montrer que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathbb{R}} e^{nf(x)}\, d\mu_n(x)$$

existe et en donner une expression simple.

Exercice 9.

Soit $N > 1$ un entier. On se donne une matrice stochastique $P = (p_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}$ qu'on considère comme la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur l'ensemble $E = \{1, \ldots, N\}$. On suppose que tous les coefficients de P sont strictement positifs. On fixe une fois pour toutes un élément $i_0 \in E$, et on se donne, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, une suite $(X_n)_{n>0}$ de variables aléatoires à valeurs dans E et qui est une chaîne de Markov de matrice de transition P issue de i_0, ce qui signifie que $X_0 = i_0$ presque sûrement et que pour tous $n > 1$ et $i_1, \ldots, i_n \in E$, on a

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Pour tout $n > 1$ et toute suite $x = (x_0, \ldots, x_n)$ d'éléments de E, on définit

$$\ell_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x_k, x_{k+1}),$$

qui est une mesure de probabilité sur $E \times E = E^2$. Pour tout $n > 1$, on définit

$$L_n = \ell_n(X_0, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta(X_k, X_{k+1}),$$

qui est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{M}(E^2)$ des mesures de probabilité sur E^2.

Montrer que la suite des lois des variables aléatoires $(L_n)_{n>1}$ satisfait sur $\mathcal{M}(E^2)$ un principe de grandes déviations dont on déterminera la fonction de taux. On se permettra de traiter l'approximation $\log k! \approx k \log k$ comme une égalité.

Indications. *L'entier n étant fixé, on pourra introduire l'ensemble*

$$L_n = \{\ell_n(x) : x \in E^{n+1}\} \subset M(E^2),$$

et pour tout $\nu \in L_n$*, l'ensemble*

$$T_n(\nu) = \{x \in E^{n+1} : \ell_n(x) = \nu\}.$$

Étant donné $\nu \in L_n$*, on pourra poser, pour tous* $i, j \in E$, $n_{ij} = n\nu(\{(i,j)\})$*, et pour tout* $i \in E$, $n_i = n\nu(\{i\} \times E) = \sum_{j\in E} n_{ij}$ *; et on pourra respectivement admettre et démontrer les inégalités*

$$n! \geq \prod_{i\in E} n_i! \quad \textit{et} \quad \binom{n}{n_{ij}} \leq \frac{n!}{\prod_{i\in E} n_i!}.$$