Exercice supplémentaire - LU2MA260
Théorème de réarrangement de Riemann

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de réarrangement de Riemann suivant dont une illustration se trouve sur la Figure 1.

Théorème 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_n a_n$ converge mais $\sum_n |a_n|$ diverge. Alors : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

Preuve. Pour cela, on pose $E^+ = \{n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0\}$ et $E^- = \mathbb{N}\backslash E^+ = \{n \in \mathbb{N}, a_n < 0\}$.

1. Justifier que E^+ et E^- sont infinis

On construit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de la manière suivante : $\sigma(0) = 0$ et pour $\sigma(0), \ldots, \sigma(n)$ construits,
- si $a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n)} < \alpha$, on pose $\sigma(n+1) = \inf E^+\backslash\{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\}$
- si $a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n)} \geqslant \alpha$, on pose $\sigma(n+1) = \inf E^-\backslash\{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\}$.

2. Justifier que σ est une bijection.

On pose alors $S_n = a_{\sigma(0)} + \cdots + a_{\sigma(n)}$ pour $n \geqslant 0$ et on veut montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. On fixe un $\varepsilon > 0$.

3. Montrer qu'il existe un entier N tel que :
   - $N \in E^+$ et $N+1 \in E^-$.
   - $\forall n \geqslant N, |a_{\sigma(n)}| \leqslant \varepsilon$.
4. Montrer que pour tout $n \geqslant N$, $|S_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
5. Conclure.

$\square$

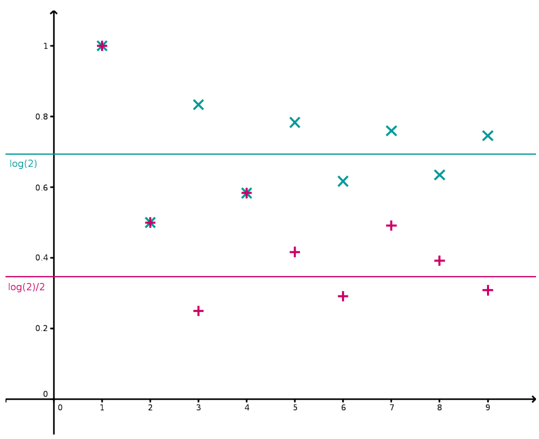

FIGURE 1 – Dans cette figure, on essaie de faire converger la même série une fois vers $\log 2$ et une fois vers $\frac{\log 2}{2}$ en réarrangeant les termes.