Master Probabilités et Modèles Aléatoires
Convergence de Mesures
Évaluation 1

Remarque : le barème est indicatif.

Question de cours

1. (6 points) Montrer qu'une mesure de probabilité sur un espace polonais est tendue.
2. (8 points) Soient E un espace polonais et $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures de probabilités sur $C([0,1],E)$. Montrer que $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers une mesure μ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées.
   (a) La suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ est tendue.
   (b) La suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge au sens des lois marginales fini-dimensionnelles vers μ.

Vrai ou Faux

Répondre par vrai ou faux. Pour les phrases marquées par une étoile, si c'est vrai prouver, si c'est faux donner un contre-exemple. Vous pouvez utiliser directement tous les résultats du cours et du TD.

1. (4 points)* L'ensemble $]0,1[$ muni de sa topologie usuelle n'est pas polonais.
2. (4 points)* Soit (E,d) un espace métrique complet. Si D est une distance sur E qui induit la même topologie que d, alors (E,D) est également complet.
3. (4 points)* Un sous-espace d'un espace topologique séparable et métrisable est séparable.
4. (4 points)* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que :
$$\forall n\in\mathbb{N}, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n,\sigma_n^2).$$
   Alors, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue si et seulement si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
5. (2 points) Si E est un espace topologique métrisable séparable, toute partie tendue de $\mathcal{M}(E)$ est relativement compacte.
6. (2 points) Pour vérifier qu'une fonction entre deux espaces topologiques est continue il suffit de montrer que l'image de toute suite convergente converge vers l'image de sa limite.
7. (4 points)* Il existe un espace de Banach $(B,\|\cdot\|_1)$ sur lequel on peut définir une norme $\|\cdot\|_2$ définissant la même topologie que $\|\cdot\|_1$ et telle que $(B,\|\cdot\|_2)$ ne soit pas complet.

Exercice 1

Soit X un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une partition de X. Pour tout $i\in I$, on munit X_i d'une topologie τ_i. On veut munir X d'une topologie. On considère la classe de sous-ensembles de X suivante :
$$\Sigma = \{U\subset X : \forall i\in I, U\cap X_i\in\tau_i\}.$$

1. (5 points) Montrer que Σ est une topologie sur X, appelée topologie somme.

On suppose maintenant que pour tout $i \in I$, l'espace topologique (X_i, τ_i) est métrisable par une distance d_i. On définie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x, y \in X, d(x,y) = \begin{cases} \min(d_i(x,y), 1) & \text{si } x, y \in X_i, \\ 1 & \text{si } x \in X_i, y \in X_j \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

2. (5 points) Montrer que d est une distance sur X qui métrise la topologie somme.

On suppose que I est dénombrable.

3. (8 points) Montrer que si pour tout $i \in I$, l'espace topologique (X_i, τ_i) est polonais, alors (X, Σ) est polonais.

Exercice 2

Soient $X_1, X_2, \ldots$ et X des variables aléatoires à valeurs dans $C([0,1], \mathbb{R})$. On suppose que $X_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} X$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose :

$$Y_n = \int_0^1 f(X_n(t))\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad Y = \int_0^1 f(X(t))\, \mathrm{d}t.$$

(8 points) Montrer que $(X_n, Y_n) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} (X, Y)$ tout en précisant le sens exact de $\Longrightarrow$.

Exercice 3

On considère l'espace $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, muni de sa tribu borélienne. On considère sur cet espace la mesure de Wiener $\mathbb{W}$ qui est la loi d'un mouvement brownien standard sur $[0,1]$. Dans le cours, on a vu qu'une mesure sur un espace polonais est toujours tendue. Le but de cet exercice est d'exhiber des compacts explicites qui vérifient la propriété de tension.

1. (8 points) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de $C([0,1], \mathbb{R})$ et une norme $\|\cdot\|_H$ sur H tels que :
   — $(H, \|\cdot\|_H)$ soit un espace de Banach,
   — l'injection canonique $i : (H, \|\cdot\|_H) \to (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ soit compacte,
   — $\mathbb{W}(H) = 1$.
2. (4 points) En déduire que $\mathbb{W}$ est tendue.
3. (4 points) Existe-t-il un compact K de $C([0,1], \mathbb{R})$ tel que $\mathbb{W}(K) = 1$? Justifier.

Bonus

Ajouter des étoiles là où il n'y en a pas dans la partie Vrai ou Faux.