Corrigé Interrogation 2

Exercice 1

1. Voir cours.

2. (b) et (c) ne peuvent pas être des domaines de convergence de séries entières, car dans les deux cas, il existe un point $z \in \mathbb{C}$ et un point $z' \in \mathbb{C}$ tels que $|z'| < |z|$ et $\sum a_n z^n$ converge mais $\sum a_n z'^n$ ne converge pas. (a) est le domaine de convergence de $\sum_n \frac{z^n}{n}$ (par Abel).

Exercice 2

1. $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\ln(n) z^n}{\ln(n-1) z^{n-1}} \right| = |z|$

donc pour $|z| < 1$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente donc $\rho \geq 1$.

pour $|z| > 1$, la série $\sum a_n z^n$ est divergente, donc $\rho \leq 1$

Conclusion : $\boxed{\rho = 1}$

2. On suppose qu'il existe une solution f développable en séries entières au voisinage de 0.

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{sur} \quad D(0,R) \text{ où } \boxed{R > 0}$$

donc par le théorème de dérivation des séries entières,

$$\forall x \in D(0,R), f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\text{et} \quad f''(x) = \sum_{n \geq 1} (n+1) n \, a_{n+1} x^{n-1}$$

$$x f''(x) = \sum_{n \geq 1} n(n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n \geq 0} n(n+1) a_{n+1} x^n$$

donc,

$$\sum_{n\geq 0} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

$$\forall x \in D(0,R)$$

et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left[n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_n\right]x^n = 0$

or $0 = \sum 0\, x^n$

par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \geq 0, \quad (n+1)^2 a_{n+1} = a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} a_n$$

Mais $f(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$

donc

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2} \quad \forall n \geq 0$$

or $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 0$ donc $R = +\infty$ et la solution existe car on peut réciproquement poser $f(x) = \sum a_n x^n$ et refaire le calcul.

Exercice 3 :

1. La série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i+x}$ $= f_i(x)$, $f_i \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ converge pour $x>0$ par le thm des séries alternées.

$f_i'(x) = \dfrac{(-1)^{i+1}}{(i+x)^2}$. Soit $a>0$. Pour $x \in [a,+\infty[$,

$\left|\dfrac{(-1)^{i+1}}{(i+x)^2}\right| \leq \dfrac{1}{(i+a)^2}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{(i+a)^2}$ converge (Critère de Riemann)

Par le théorème de dérivation sous le signe Σ,

S est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

donc S est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Comme il s'agit d'une série alterné pour $S'(x)$
$S'(x)$ a même signe que son 1er terme
cad $-\frac{1}{x^2}$. Donc S décroissante.

3. $$S(x+1) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$
$$= \frac{1}{x}$$

4. • $$S(x) = -S(x+1) + \frac{1}{x}$$
$$-S(x+1) \xrightarrow[x \to 0]{} -S(1)$$
donc $$S(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

• $$\frac{1}{2}\left(S(x) + S(x+1)\right) \leqslant S(x) \quad \text{car } S \searrow$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(S(x) + S(x-1)\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2x} \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{2(x-1)}$$
mais $\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x-1}$

donc $S(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.