

**Exercice 1.** Soient  $(E, \tau_E)$  et  $(F, \tau_F)$  des espaces topologiques et  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que  $f$  est continue si, et seulement si :

$$\forall A \subset E, f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

**Exercice 2.** Soient  $(E, \tau_E)$  et  $(F, \tau_F)$  des espaces topologiques compacts et  $f : E \rightarrow F$  une application bijective et continue. Montrer que  $f$  est un homéomorphisme.

**Exercice 3** (Bases et Sous-Bases de Topologie). Soit  $E$  un ensemble. Une base de topologie sur  $E$  est une collection  $\Gamma_E$  de sous-ensembles de  $E$  telle que :

- Tout  $x \in E$  est contenue dans l'au moins un des éléments de  $\Gamma_E$ .
- Pour tout  $x \in E$  qui se trouve à la fois dans deux éléments  $B_1$  et  $B_2$  de  $\Gamma_E$ , il existe un élément  $B_3$  de  $\Gamma_E$  tel que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

On définit la classe  $\tau_E$  sous-ensembles de  $E$  comme suit :

$$A \in \tau_E \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists B \in \Gamma_E; x \in B \subset A$$

1. Montrer que  $\tau_E$  est une topologie dont tout ouvert s'écrit comme réunion d'éléments de  $\Gamma_E$ . Cette topologie est dite engendrée par  $\Gamma_E$ .
2. Montrer que dans un espace métrique, l'ensemble des boules ouvertes de rayons rationnels est une base de topologie qui engendre la topologie métrique.

Considérons maintenant un autre ensemble  $F$  munit d'une base  $\Gamma_F$  qui engendre la topologie  $\tau_F$  et  $f : E \rightarrow F$ .

3. Montrer que  $f$  est continue si, et seulement si :

$$\forall A \in \Gamma_F, f^{-1}(A) \in \tau_E.$$

Que signifie cette assertion dans le cas d'un espace métrique ?

Une sous-base  $\mathcal{S}_E$  de topologie de  $E$  est une collection de sous-ensembles de  $E$  dont la réunion est  $E$ .

4. Montrer que la classe des intersections finies d'éléments de  $\mathcal{S}_E$  est une base de topologie. La topologie engendrée est appelée topologie engendrée par  $\mathcal{S}$ .
5. Montrer que le résultat de la question 3 reste vrai en remplaçant  $\forall A \in \Gamma_F$  par  $\forall A \in \mathcal{S}_F$  où  $\mathcal{S}_F$  est une sous-base qui engendre  $\tau_F$ .

**Exercice 4** (Topologie Initiale). Soient  $I$  un ensemble d'indices et  $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Soit  $(F, \Sigma)$  un espace topologique et pour tout  $i \in I$ , on considère une application  $\pi_i : F \rightarrow E_i$ . On appelle topologie initiale relative à  $((E_i, \tau_i)_{i \in I}, F, (\pi_i)_{i \in I})$  la topologie la plus petite sur  $F$  rendant continues toutes les applications  $\pi_i$ . Pour  $i \in I, O \in \tau_i$ , on pose :  $S_{i,O} = \pi_i^{-1}(O)$ .

1. Montrer que  $\{S_{i,O}; O \in \tau_i, i \in I\}$  est une sous-base.
2. En déduire que la topologie engendrée par cette sous-base est la topologie initiale.
3. Faire le lien avec la topologie faible- $*$ .

**Exercice 5** (Topologie Produit). Soient  $I$  un ensemble d'indice et  $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. On définit le produit  $\prod_{i \in I} E_i$  par:

$$\prod_{i \in I} E_i = \left\{ \Phi : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i; \forall i \in I, \Phi(i) \in E_i \right\},$$

et on y pense bien sûr comme une famille  $(u_i)_{i \in I}$  dont chaque  $u_i$  est dans  $E_i$ . On définit de plus les applications projections comme suit. Pour  $j \in I$ ,  $\pi_j : x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i \mapsto \pi_j(x) = x_j \in E_j$ . La topologie produit est la topologie initiale relative  $((E_i, \tau_i)_{i \in I}, \prod_{i \in I} E_i, (\pi_i)_{i \in I})$

1. Donner la forme d'un ouvert de  $\prod_{i \in I} E_i$ .
2. Montrer que si  $I$  est dénombrable et les  $E_i$  sont séparables, alors  $\prod_{i \in I} E_i$  est séparable.
3. Montrer que si  $I$  est fini et les  $E_i$  sont des espaces métriques de distance  $d_i$ , alors la topologie produit n'est autre que celle de l'espace métrique produit, c'est à dire engendrée (entre autres) par la distance  $d$  définie par:

$$\forall x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i, d(x, y) = \sum_{i \in I} d_i(x_i, y_i).$$

4. On considère maintenant le cas où  $I = \mathbb{N}$  et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $E_i$  est un espace métrique de distance  $d_i$ . On définit  $d : \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \times \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \rightarrow \mathbb{R}^+$  par:

$$\forall x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i, d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}.$$

- (a) Montrer que  $d$  est une distance.
  - (b) Montrer que la topologie induite par  $d$  coïncide avec la topologie produit.
  - (c) Montrer qu'une suite  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge pour  $d$  si, et seulement si elle converge composante par composante.
5. Montrer que le produit dénombrable d'espaces polonais est polonais.

**Exercice 6** (Topologie de Kuratowski). Dans cet exercice, on souhaite caractériser une topologie par une approche opératoire, notamment par les opérateurs de fermeture et d'intérieur. On va commencer par se donner un espace topologique  $(E, \tau)$  et considérer l'opérateur  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  défini par:

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), fA = \bar{A} = \bigcup_{F \text{ fermé}, F \subset A} F.$$

Dans un premier temps, on va exhiber des propriétés importantes de  $f$  puis dans un second temps montrer que la donnée d'un opérateur vérifiant de telles propriétés induit une topologie.

1. Montrer les propriétés suivantes de  $f$ :

(a)  $f\emptyset = \emptyset$ .

(b)  $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \subset B \Rightarrow fA \subset fB$ .

(c)  $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f(A)$ .

(d)  $f \circ f = f$ .

(e)  $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cup B) = fA \cup fB$ .

*A-t-on nécessairement  $f(A \cap B) = fA \cap fB$  ? Prouver ou donner un contre exemple.*

On se donne maintenant un ensemble  $E$  et un opérateur opérateur  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  qui vérifie les propriétés (a) à (e) de la question précédente. On pose:

$$\tau = \{O \in \mathcal{P}(E); fcO = cO\},$$

où  $c$  désigne l'opérateur de complémentation.

2. Montrer que  $\tau$  est une topologie telle que l'adhérence d'une partie  $A$  est  $fA$ .

3. Peut-on vérifier la continuité des applications entre deux espaces topologiques en utilisant exclusivement  $f$  ?

4. Expliquer comment peut-on retrouver rapidement ce qui précède en utilisant un opérateur d'intérieur à la place d'un opérateur de fermeture.

5. Dans cette question, il s'agit de faire un petit jeu. Si on prend un ensemble  $A$ , on peut s'amuser à construire  $iA, fiA, ifiA, icA, \dots$ . En prenant

$$A = [0, 1[ \cup ]1, 2] \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$$

dans la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ , montrer que l'on peut former au moins 14 ensembles différents. Montrer qu'en fait ce nombre 14 est maximal.

**Exercice 7** (Preuve topologique de Furstenberg sur l'infinité des nombres premiers). Dans cet exercice, on se propose de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini par un moyen topologique. On se place dans  $\mathbb{Z}$  et pour  $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}$ , on définit:

$$S(a, b) = \{na + b; n \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z} + b.$$

1. Montrer que  $(S(a, b))_{(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}}$  est une base de topologie sur  $\mathbb{Z}$ . On munit alors  $\mathbb{Z}$  de la topologie induite par cette base.

2. Montrer que les  $S(a, b)$  sont aussi fermés.

3. Montrer que:

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ premier}} S(p, 0),$$

et en déduire que l'ensemble des nombres premiers ne peut pas être fini.

**Exercice 8.** *Le but de cet exercice est de montrer que tout sous-ensemble fermé ou ouvert d'un espace polonais est polonais. Soit  $E$  un espace polonais.*

1. *Soit  $F \subset E$  un fermé. Montrer que  $F$  est polonais.*

*On considère maintenant  $U$  un ouvert propre de  $E$ . Soit  $d$  une distance sur  $E$  telle que  $(E, d)$  soit complet. On définit  $d_0 : U \times U \rightarrow \mathbb{R}_+$  par:*

$$\forall x, y \in U, d_0(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, U^c)} - \frac{1}{d(y, U^c)} \right|.$$

2. *Montrer que  $d_0$  définit une distance sur  $U$ .*

3. *Montrer que  $d_0$  induit sur  $U$  la topologie trace de  $E$  sur  $U$ .*

4. *Montrer que  $(U, d_0)$  est un espace métrique complet. Conclure.*

**Exercice 9.** *Soit  $C[0, +\infty[$  l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .*

1. *On définit sur  $C[0, +\infty[ \times C[0, +\infty[$  l'application  $d$ :*

$$\forall f, g \in C[0, +\infty[, d(f, g) = \sup\{1 \wedge |f(t) - g(t)|; t \in [0, +\infty)\}$$

(a) *Montrer que  $d$  définit une distance sur  $C[0, +\infty[$ .*

(b) *On suppose que  $f$  et  $f_1, f_2, \dots$  appartiennent à  $C[0, +\infty[$ . Montrer que  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $f$  pour  $d$  si, et seulement si elle converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .*

(c) *Montrer que  $C[0, +\infty[$ , muni de  $d$  n'est pas séparable et donc n'est pas polonais.*

2. *On définit sur  $C[0, +\infty[ \times C[0, +\infty[$  l'application  $D$ :*

$$\forall f, g \in C[0, +\infty[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sup\{1 \wedge |f(t) - g(t)|; t \in [0, n]\}$$

(a) *Montrer que  $D$  est une distance.*

(b) *On suppose que  $f$  et  $f_1, f_2, \dots$  appartiennent à  $C[0, +\infty[$ . Montrer que  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $f$  pour  $D$  si, et seulement si elle converge uniformément vers  $f$  sur tout les sous-ensembles compacts de  $[0, +\infty[$ .*

(c) *Montrer que munit de  $D$ ,  $C[0, +\infty[$  est polonais.*

**Exercice 10.** *Soient  $(E, \tau_E)$  et  $(F, \tau_F)$  deux espaces polonais, et  $f : E \rightarrow F$  une fonction continue. Montrer que  $\Lambda : \mathcal{M}(E) \rightarrow \mathcal{M}(F)$  définie par:*

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(E), \Lambda(\mu) = \mu \circ f^{-1}$$

*est continue.*

**Exercice 11.** Soit  $X$  un espace topologique. Pour  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ , on définit la distance en variation totale entre  $\mu$  et  $\nu$  par :

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

1. Montrer que si  $d(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  alors  $\mu_n \Rightarrow \mu$ .
2. La réciproque est-elle vraie en générale ?
3. Montrer que si  $X = \mathbb{Z}$  alors cette distance métrise la convergence en loi. Montrer ainsi que dans ce cas:

$$d(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mu(k) - \nu(k)|.$$

**Exercice 12** (Distance de Lévy-Prohorov). Soit  $X$  un espace topologique métrisable et séparable. On définit sur  $\mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X)$  l'application suivante:

$$(\mu, \nu) \mapsto d_{LP}(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0; \forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \leq \nu(A^\epsilon) + \epsilon \text{ et } \nu(A) \leq \mu(A^\epsilon) + \epsilon\},$$

où pour  $A \subset X$  et  $\epsilon \geq 0$  on note

$$A^\epsilon = \{x \in X; \exists y \in X \text{ avec } d(x, y) < \epsilon\}.$$

1. Pour  $x, y \in X$ , calculer  $d_{LP}(\delta_x, \delta_y)$ .
2. Montrer que  $d_{LP}$  est une distance sur  $\mathcal{M}(X)$ .
3. Montrer que en fait on a:

$$d_{LP}(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0; \forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \leq \nu(A^\epsilon) + \epsilon\}.$$

4. Montrer que si  $\mu, \mu_1, \mu_2$ , sont des éléments de  $\mathcal{M}(X)$  telles que  $d_{LP}(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , alors  $\mu_n \Rightarrow \mu$ .

On veut montrer maintenant que l'on a réciproquement : si  $\mu, \mu_1, \mu_2$ , sont des éléments de  $\mathcal{M}(X)$  telles que  $\mu_n \Rightarrow \mu$  alors  $d_{LP}(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . On fixe un  $\epsilon > 0$ . Soit  $\mathcal{U}$  l'ensemble des ouverts de la forme :

$$\bigcup_{i \in J} B(x_i, \epsilon), I \subset \{1, \dots, m\}.$$

Pour  $A \in \mathcal{B}(X)$ , on pose:

$$U(A) = \bigcup_{i=1, \dots, m; A \cap B(x_i, \epsilon) \neq \emptyset} B(x_i, \epsilon).$$

5. Montrer que pour  $n$  assez grand, on a  $\mu(A) \leq \mu_n(U(A)) + 2\epsilon$ .
6. Conclure que  $d_{LP}(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

7. En déduire que  $d_{LP}$  métrise la topologie de la convergence en loi sur  $\mathcal{M}(X)$ .

**Exercice 13.** On travaille sur  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ . On définit pour  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\frac{i}{n}}.$$

Montrer que  $\mu_n \Rightarrow \lambda$ , la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 14.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes la suite de mesures  $\delta_{u_n}$  est tendue ?

**Exercice 15.** Montrer que toute suite de variables aléatoires réelles bornée dans  $L^1$  admet une sous-suite qui converge en loi.

**Exercice 16.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité tendue sur un espace métrique  $(E, d)$ . Montrer qu'il existe un borélien  $A \subset E$  tel que  $(A, d)$  soit séparable et  $\mu(A) = 1$ .

**Exercice 17.** Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux espaces topologiques, et  $\Gamma$  une famille de mesure borélienne sur  $E_1 \times E_2$ . Montrer que  $\Gamma$  est tendue si, et seulement si les deux familles:

$$\{\mu(\cdot \times E_2); \mu \in \Gamma\} \text{ et } \{\mu(E_1 \times \cdot); \mu \in \Gamma\}$$

sont tendues.

**Exercice 18** ( $\mathcal{M}(E)$  compact  $\Rightarrow E$  compact.). Soit  $(E, d)$  un espace métrique séparable.

1. Montrer que l'application  $F : x \mapsto \delta_x$  est un homéomorphisme de  $E$  sur  $E_0 = \{\delta_y, y \in E\} \subset \mathcal{M}(E)$ .

Soit  $\mu_n = \delta_{x_n}$  une suite de  $E_0$  qui converge étroitement vers  $\mu$ .

2. On suppose que  $(x_n)_{n \geq 1}$  n'admet aucune sous-suite convergente. Montrer que  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  est un fermé, ainsi que toutes ses parties.
3. Montrer que cela est contradictoire avec la convergence étroite de  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et en déduire que  $(x_n)_{n \geq 1}$  admet une sous-suite convergente.
4. En déduire que  $E_0$  est un fermé de  $\mathcal{M}(E)$ , et puis que si  $\mathcal{M}(E)$  est compact, alors  $E$  est compact.

**Exercice 19** (Le Théorème de Paul Lévy). Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité sur  $\mathbb{R}$ . On définit sa transformée de Fourier par:

$$\mathcal{F}(\mu) : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) \mu(dx)$$

On veut montrer le théorème de Paul Lévy suivant:

**Théorème.** Soient  $\mu$  et  $\mu_1, \mu_2, \dots$  des mesures de probabilité boréliennes sur  $\mathbb{R}$ . Alors la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $\mu$  si, et seulement si la suite  $\mathcal{F}(\mu_n)$  converge simplement vers  $\mathcal{F}(\mu)$ .

1. Montrer le sens "facile" du théorème.
2. Soient  $\nu$  une mesure de probabilité borélienne et  $\epsilon > 0$ ,

(a) Montrer que:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathcal{F}(\nu)(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin(\epsilon x)}{x} \nu(dx)$$

(b) En déduire que:

$$\nu \left( \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{2}{\epsilon} \right\} \right) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (1 - \mathcal{F}(\nu)(t)) dt.$$

3. Montrer que  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est tendue.
4. Conclure la preuve du théorème.

**Exercice 20.** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \infty[, f_n(t) = \sin \left( \sqrt{t + 4(n\pi)^2} \right).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équi continues convergent simplement vers 0.
2. La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet-elle une sous-suite qui converge uniformément? Commenter.

**Exercice 21.** Soit  $K : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$  donnée par:

$$\forall s \in [a, b], (Kf)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt,$$

où  $k \in C([a, b] \times [a, b])$ , et soit  $(f_n)$  une suite bornée de  $X = (C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty})$ . Montrer que  $(Kf_n)$  admet une sous-suite uniformément convergente.

**Exercice 22.** Dans le cours, on a définie la tribu cylindrique sur  $C([0, 1], E)$  comme la tribu engendrée par les applications évaluations. En fait, cette même définition nous donne une tribu sur l'espace de toutes les fonctions de  $[0, 1]$  dans  $E$  appelée la tribu produit. Montrer que, par exemple si  $E = \mathbb{R}$ ,  $C([0, 1], \mathbb{R})$  n'est pas mesurable pour la tribu produit.

**Exercice 23.** Soit  $(E, d)$  un espace polonais dans lequel les fermés bornés sont compacts. Soit  $\Gamma$  une partie de  $\mathcal{M}(E)$ . On suppose que:

1.  $\{\mu^0; \mu \in \Gamma\}$  est tendue.
2. Pour tous  $\epsilon > 0$  et  $\eta > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que:

$$\forall \mu \in \Gamma, \mu(\{x \in \mathcal{W}(E); \omega(x, \delta) \leq \eta\}) \geq 1 - \epsilon$$

Montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\{\mu^t; \mu \in \Gamma\}$  est tendue.

**Exercice 24.** Soient  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , et  $X$  des processus croissants, continus, de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $X_n$  converge en loi vers  $X$  pour la topologie uniforme sur  $C$  si et seulement si  $X_n$  converge vers  $X$  au sens des marginales de dimension finie.

**Exercice 25.** Montrer le théorème de Donsker dans le cas où les variables aléatoires ont un moment d'ordre 4.

**Exercice 26.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées et de variance 1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{X_1 + \dots + X_i}{\sqrt{i}}\right) \Rightarrow \int_0^1 f(B_s) ds,$$

où  $B$  est un mouvement brownien standard.

**Exercice 27.** Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées et de variance 1. On pose:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \text{ et } M_n = \max_{1 \leq i \leq n} S_i$$

On définit  $g : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  par:

$$\forall f \in C([0, 1]), g(f) = \sup_{t \in [0, 1]} f(t).$$

1. Montrer que  $g$  est mesurable.

2. Montrer que:

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow g(B),$$

où  $B$  est un mouvement Brownien standard.

Ce résultat nous dit que si l'on connaît la loi de  $\sup_{t \in [0, 1]} B_t$ , on connaît la distribution limite de  $\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$  quelle que soit la suite de variable i.i.d.  $(X_n)_{n \geq 1}$  correspondante. Dans la suite de l'exercice, on se propose de calculer la loi de  $\sup_{t \in [0, 1]} B_t$ . On se place alors dans le cas particulier où  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ .

3. Montrer que pour tout entier positif  $a$ :

$$\mathbb{P}(M_n \geq a) = 2\mathbb{P}(S_n > a) + \mathbb{P}(S_n = a).$$

4. En déduire que  $\sup_{t \in [0, 1]} B(t) \sim |N|$  où  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercice 28** (Loi des grands nombres fonctionnelle.). Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  des variables aléatoires i.i.d. réelles ayant un moment d'ordre 1. Pour  $n \geq 1$ , on considère le processus aléatoire:

$$S_n(t) = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}}{n}, t \in [0, 1].$$

Montrer que:

$$(S_n(t))_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{p.s.} (t \mapsto E[X_1]t)_{0 \leq t \leq 1} \text{ lorsque } n \rightarrow 1.$$



**Exercice 29.** On se place sur l'espace de Banach  $C([0, 1])$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de sa tribu borélienne. On munit l'espace  $M(C([0, 1]))$  des mesures de probabilités boréliennes sur  $C([0, 1])$  de la topologie de la convergence faible.

Pour tout réel  $H \in ]0, 1[$ , on admettra l'existence et l'unicité d'un élément  $P_H$  de  $M(C([0, 1]))$  tel que sous  $P_H$ , le processus canonique  $(W_t)_{t \in [0, 1]}$  soit gaussien et centré, de covariance donnée par la formule suivante:

$$\forall s, t \in [0, 1], \quad E^{P_H}[W_s W_t] = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H}).$$

On peut noter que pour  $H = \frac{1}{2}$ ,  $P_H$  est la mesure de Wiener. Un processus de loi  $P_H$  s'appelle un mouvement brownien fractionnaire d'exposant de Hurst  $H$ .

1. Montrer que si  $Z$  est une variable aléatoire gaussienne centrée, alors  $E[Z^4] = 3E[Z^2]^2$ .
2. Montrer que l'application  $H \mapsto P_H$  de  $]0, 1[$  dans  $M(C([0, 1]))$  est continue.
3. Soit  $H \in ]0, 1[$  et soit  $X = (X_t)_{t \in [0, 1]}$  un processus de loi  $P_H$ . Montrer que pour tout  $\alpha \in ]0, H[$ , les trajectoires de  $X$  sont presque sûrement Höldériennes d'exposant  $\alpha$ .