Exercice 1. *Soient (E, τ_E) et (F, τ_F) des espaces topologiques et $f : E \to F$. Montrer que f est continue si, et seulement si:*

$$\forall A \subset E, f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Exercice 2. *Soient (E, τ_E) et (F, τ_F) des espaces topologiques compacts et $f : E \to F$ une application bijective et continue. Montrer que f est un homéomorphisme.*

Exercice 3 (Bases et Sous-Bases de Topologie)**.** *Soit E un ensemble. Une base de topologie sur E est une collection Γ_E de sous-ensembles de E telle que:*

- *Tout $x \in E$ est contenu dans l'au moins un des éléments de Γ_E.*
- *Pour tout $x \in E$ qui se trouve à la fois dans deux éléments B_1 et B_2 de Γ_E, il existe un élément B_3 de Γ_E tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

On définit la classe τ_E sous-ensembles de E comme suit:

$$A \in \tau_E \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists B \in \Gamma_E; x \in B \subset A.$$

1. *Montrer que τ_E est une topologie dont tout ouvert s'écrit comme réunion d'éléments de Γ_E. Cette topologie est dite engendrée par Γ_E.*
2. *Montrer que dans un espace métrique, l'ensemble des boules ouvertes de rayons rationnels est une base de topologie qui engendre la topologie métrique.*

Considérons maintenant un autre ensemble F munit d'une base Γ_F qui engendre la topologie τ_F et $f : E \to F$.

3. *Montrer que f est continue si, et seulement si:*

$$\forall A \in \Gamma_F, f^{-1}(A) \in \tau_E.$$

Que signifie cette assertion dans le cas d'un espace métrique ?

Une sous-base $\mathcal{S}_E$ de topologie de E est une collection de sous-ensembles de E dont la réunion est E.

4. *Montrer que la classe des intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}_E$ est une base de topologie. La topologie engendrée est appelée topologie engendrée par $\mathcal{S}$.*
5. *Montrer que le résultat de la question 3 reste vrai en remplaçant $\forall A \in \Gamma_F$ par $\forall A \in \mathcal{S}_F$ où $\mathcal{S}_F$ est une sous-base qui engendre τ_F.*

Exercice 4 (Topologie Initiale)**.** *Soient I un ensemble d'indice et $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit F un ensemble . On considère pour tout $i \in I$ une application $\pi_i : F \to E_i$. On appelle topologie initiale relative à $((E_i, \tau_i)_{i\in I}, F, (\pi_i)_{i\in I})$ la topologie la plus petite sur F rendant continues toutes les applications π_i. Pour $i \in I, O \in \tau_i$, on pose: $S_{i,O} = \pi_i^{-1}(O)$.*

1. *Montrer que* $\{S_{i,O}; O \in \tau_i, i \in I\}$ *est une sous-base.*

2. *En déduire que la topologie engendrée par cette sous-base est la topologie initiale.*

3. *Faire le lien avec la topologie faible*$-*$.

4. *Soit* (G, Σ) *un troisième espace topologique et* $Z : G \to F$ *une application. Montrer que* Z *est continue si, et seulement si pour tout* $i \in I$, $\pi_i \circ Z$ *est une application continue de* G *dans* E_i.

Exercice 5 (Topologie Produit). *Soient* I *un ensemble d'indice et* $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ *une famille d'espaces topologiques. On définit le produit* $\prod_{i \in I} E_i$ *par:*

$$\prod_{i \in I} E_i = \left\{ \Phi : I \to \bigcup_{i \in I} E_i ; \forall i \in I, \Phi(i) \in E_i \right\},$$

et on y pense bien sûr comme une famille $(u_i)_{i \in I}$ *dont chaque* u_i *est dans* E_i. *On définit de plus les applications projections comme suit. Pour* $j \in I$, $\pi_j : x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i \mapsto \pi_j(x) = x_j \in E_j$. *La topologie produit est la topologie initiale relative* $((E_i, \tau_i)_{i \in I}, \prod_{i \in I} E_i, (\pi_i)_{i \in I})$

1. *Donner la forme d'un ouvert de* $\prod_{i \in I} E_i$.

2. *Montrer que si* I *est dénombrable et les* E_i *sont séparables, alors* $\prod_{i \in I} E_i$ *est séparable.*

3. *Montrer que si* I *est fini et les* E_i *sont des espaces métriques de distance* d_i, *alors la topologie produit n'est autre que celle de l'espace métrique produit, c'est à dire engendrée (entre autres) par la distance* d *définie par:*

$$\forall x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i, d(x, y) = \sum_{i \in I} d_i(x_i, y_i).$$

4. *On considère maintenant le cas où* $I = \mathbb{N}$ *et pour tout* $i \in \mathbb{N}$, E_i *est un espace métrique de distance* d_i. *On définit* $d : \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \times \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \to \mathbb{R}^+$ *par:*

$$\forall x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i, d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}.$$

   (a) *Montrer que* d *est une distance.*

   (b) *Montrer que la topologie induite par* d *coïncide avec la topologie produit.*

   (c) *Montrer qu'une suite* $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge pour* d *si, et seulement si elle converge composante par composante.*

5. *Montrer que le produit dénombrable d'espaces polonais est polonais.*

Exercice 6 (Topologie de Kuratowski). *Dans cet exercice, on souhaite caractériser une topologie par une approche opératoire, notamment par les opérateurs de fermeture et* *d'intérieur. On va commencer par se donner un espace topologique (E,τ) et considérer l'opérateur $f:\mathcal{P}(E)\to\mathcal{P}(E)$ défini par:*

$$\forall A\in\mathcal{P}(E), fA=\bar{A}=\bigcap_{F ferm\acute{e}, A\subset F} F.$$

Dans un premier temps, on va exhiber des propriétés importantes de f puis dans un second temps montrer que la donnée d' un opérateur vérifiant de telles propriétés induit une topologie.

1. *Montrer les propriétés suivantes de f:*
   (a) $f\emptyset=\emptyset$.
   (b) $\forall A,B\in\mathcal{P}(E), A\subset B\Rightarrow fA\subset fB$.
   (c) $\forall A\in\mathcal{P}(E), A\subset f(A)$.
   (d) $f\circ f=f$.
   (e) $\forall A,B\in\mathcal{P}(E), f(A\cup B)=fA\cup fB$.

   A-t-on nécessairement $f(A\cap B)=fA\cap fB$? Prouver ou donner un contre exemple.

On se donne maintenant un ensemble E et un opérateur opérateur $f:\mathcal{P}(E)\to\mathcal{P}(E)$ qui vérifie les propriétes (a) à (e) de la question précédente. On pose:

$$\tau=\{O\in\mathcal{P}(E); fcO=cO\},$$

où c désigne l'opérateur de complémentation.

2. *Montrer que τ est une topologie telle que l'adhérence d'une partie A est fA.*

3. *Peut on vérifier la continuité des applications entre deux espaces topologiques en utilisant exclusivement f ?*

4. *Expliquer comment peut-on retrouver rapidement ce qui précède en utilisant un opérateur d'intérieur i à la place d'un opérateur de fermeture.*

5. *Dans cette question, il s'agit de faire un petit jeu. Si on prend un ensemble A, on peut s'amuser à construire $iA, fiA, ifiA, icA, \ldots$. En prenant*

   $$A=[0,1[\cup]1,2]\cup\{3\}\cup([4,5]\cap\mathbb{Q})$$

   dans la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, montrer que l'on peut former au moins 14 ensembles différents. Montrer qu'en fait ce nombre 14 est maximal.

Exercice 7 (Preuve topologique de Furstenberg sur l'infinité des nombres premiers)**.** *Dans cet exercice, on se propose de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini par un moyen topologique. On se place dans $\mathbb{Z}$ et pour $a\in\mathbb{Z}^*, b\in\mathbb{Z}$, on définit:*

$$S(a,b)=\{na+b; n\in\mathbb{Z}\}=a\mathbb{Z}+b.$$

1. *Montrer que* $(S(a,b))_{(a,b)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}}$ *est une base de topologie sur* $\mathbb{Z}$ *. On munit alors* $\mathbb{Z}$ *de la topologie induite par cette base.*

2. *Montrer que les* $S(a,b)$ *sont aussi fermés.*

3. *Montrer que:*

$$\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\} = \bigcup_{p \text{ premier}} S(p,0),$$

et en déduire que l'ensemble des nombres premiers ne peut pas être fini.

Exercice 8. *Le but de cet exercice est de montrer que tout sous-ensemble fermé ou ouvert d'un espace polonais est polonais. Soit* E *un espace polonais.*

1. *Soit* $F \subset E$ *un fermé. Montrer que* F *est polonais.*

On considère maintenant U *un ouvert propre de* E*. Soit* d *une distance sur* E *telle que* (E,d) *soit complet. On définit* $d_0 : U \times U \to \mathbb{R}_+$ *par:*

$$\forall x,y \in U, d_0(x,y) = d(x,y) + \left|\frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)}\right|.$$

2. *Montrer que* d_0 *définie une distance sur* U*.*

3. *Montrer que* d_0 *induit sur* U *la topologie trace de* E *sur* U*.*

4. *Montrer que* (U,d_0) *est un espace métrique complet. Conclure.*

Exercice 9. *Soit* $C([0,+\infty[)$ *l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle* $[0,+\infty[$*.*

1. *On définit sur* $C([0,+\infty[) \times C([0,+\infty[)$ *l'application* d*:*

$$\forall f,g \in C([0,+\infty[), d(f,g) = \sup\{1 \wedge |f(t)-g(t)|; t \in [0,+\infty)\}.$$

   (a) *Montrer que* d *définie une distance sur* $C([0,+\infty[)$*.*

   (b) *On suppose que* f *et* $f_1, f_2, \ldots$ *appartiennent à* $C([0,+\infty[)$*. Montrer que* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* f *pour* d *si, et seulement si elle converge uniformément vers* f *sur* $[0,+\infty[$*.*

   (c) *Montrer que* $C([0,+\infty[)$*, muni de* d *n'est pas séparable et donc n'est pas polonais.*

2. *On définit sur* $C([0,+\infty[) \times C([0,+\infty[)$ *l'application* D*:*

$$\forall f,g \in C([0,+\infty[), \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sup\{1 \wedge |f(t)-g(t)|; t \in [0,n]\}.$$

   (a) *Montrer que* D *est une distance.*

(b) *On suppose que f et $f_1, f_2, \dots$ appartiennent à $C([0,+\infty[)$. Montrer que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f pour D si, et seulement si elle converge uniformément vers f sur tout les sous-ensembles compacts de $[0,+\infty[$.*

(c) *Montrer que munit de D, $C([0,+\infty[)$ est polonais.*

Exercice 10. *Soient (E,τ_E) et (F,τ_F) deux espaces polonais, et $f : E \to F$ une fonction continue. Montrer que $\Lambda : \mathcal{M}(E) \to \mathcal{M}(F)$ définie par:*

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(E), \Lambda(\mu) = \mu \circ f^{-1}$$

est continue.

Exercice 11. *Soit X un espace topologique. Pour $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$, on définie la distance en variation totale entre μ et ν par :*

$$d_{VT}(\mu,\nu) = \sup_{A\in\mathcal{B}(X)} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

1. *Montrer que si $d_{VT}(\mu_n,\mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ alors $\mu_n \Rightarrow \mu$.*

2. *La réciproque est-elle vraie en génerale ?*

3. *Montrer que si $X = \mathbb{Z}$ alors cette distance métrise la convergence en loi. Montrer ainsi que dans ce cas:*
$$d_{VT}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu(k) - \nu(k)|.$$

Exercice 12 (Distance de Lévy-Prohorov)**.** *Soit X un espace topologique métrisable et séparable. On définie sur $\mathcal{M}(X)\times\mathcal{M}(X)$ l'application suivante:*

$$(\mu,\nu) \mapsto d_{LP}(\mu,\nu) = \inf\{\epsilon > 0; \forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \leq \nu(A^\epsilon) + \epsilon \text{ et } \nu(A) \leq \mu(A^\epsilon) + \epsilon\},$$

où pour $A \subset X$ et $\epsilon \geq 0$ on note

$$A^\epsilon = \{x \in X; \exists y \in X \text{ avec } d(x,y) < \epsilon\}.$$

1. *Pour $x, y \in X$, calculer $d_{LP}(\delta_x, \delta_y)$.*

2. *Montrer que d_{LP} est une distance sur $\mathcal{M}(X)$.*

3. *Montrer que l'on a en fait:*
$$d_{LP}(\mu,\nu) = \inf\{\epsilon > 0; \forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \leq \nu(A^\epsilon) + \epsilon\}.$$

4. *Montrer que si $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ sont des éléments de $\mathcal{M}(X)$ tels que $d_{LP}(\mu_n,\mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $\mu_n \Rightarrow \mu$.*

On veut montrer maintenant que l'on a rćiproquement : si $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ sont des éléments de $\mathcal{M}(X)$ tels que $\mu_n \Rightarrow \mu$, alors $d_{LP}(\mu_n, \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On fixe un $\epsilon > 0$. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts de la forme :

$$\bigcup_{i\in J} B(x_i, \epsilon), J \subset \{1, \ldots, m\}.$$

Pour $A \in \mathcal{B}(X)$, on pose:

$$U(A) = \bigcup_{i=1,\ldots,m; A\cap B(x_i,\epsilon)\neq\emptyset} B(x_i, \epsilon).$$

5. *Montrer que pour n assez grand, on a $\mu(A) \le \mu_n(U(A)) + 2\epsilon$.*
6. *Conclure que $d_{LP}(\mu_n, \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*
7. *En déduire que d_{LP} métrise la topologie de la convergence en loi sur $\mathcal{M}(X)$.*

Exercice 13. *On travaille sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{i}{n}}.$$

Montrer que $\mu_n \Rightarrow \lambda$, la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

Exercice 14. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes la suite de mesures δ_{u_n} est tendue ?*

Exercice 15. *Montrer que toute suite de variables aléatoires réelles bornée dans L^1 admet une sous-suite qui converge en loi.*

Exercice 16. *Soit μ une mesure de probabilité tendue sur un espace métrique (E, d). Montrer qu'il existe un borélien $A \subset E$ tel que (A, d) soit séparable et $\mu(A) = 1$.*

Exercice 17. *Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques, et Γ une famille de mesure borélienne sur $E_1 \times E_2$. Montrer que Γ est tendue si, et seulement si les deux familles:*

$$\{\mu(\cdot \times E_2); \mu \in \Gamma\} \text{ et } \{\mu(E_1 \times \cdot); \mu \in \Gamma\}$$

sont tendues.

Exercice 18 ($\mathcal{M}(E)$ compact $\Rightarrow$ E compact.). *Soit (E, d) un espace métrique séparable.*

1. *Montrer que l'application $F : x \mapsto \delta_x$ est un homéomorphisme de E sur $E_0 = \{\delta_y, y \in E\} \subset M(E)$.*

Soit $\mu_n = \delta_{x_n}$ une suite de E_0 qui converge étroitement vers μ.

2. *On suppose que $(x_n)_{n\ge1}$ n'admet aucune sous-suite convergente. Montrer que $\{x_n\}_{n\ge1}$ est un fermé, ainsi que toutes ses parties.*

3. *Montrer que cela est contradictoire avec la convergence étroite de* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *et en déduire que* $(x_n)_{n\geq 1}$ *admet une sous-suite convergente.*

4. *En déduire que* E_0 *est un fermé de* $\mathcal{M}(E)$, *et puis que si* $\mathcal{M}(E)$ *est compact, alors* E *est compact.*

Exercice 19 (Le Théorème de Paul Lévy)**.** *Soit* μ *une mesure borélienne de probabilité sur* $\mathbb{R}$. *On définit sa transformée de Fourier par:*

$$\mathcal{F}(\mu) : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\mu(dx).$$

On veut montrer le théorème de Paul Lévy suivant:

Théorème. *Soient* μ *et* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *des mesures de probabilité boréliennes sur* $\mathbb{R}$. *Alors la suite* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* μ *si, et seulement si la suite* $\mathcal{F}(\mu_n)$ *converge simplement vers* $\mathcal{F}(\mu_n)$.

1. *Montrer le sens "facile" du théorème.*

2. *Soient* ν *une mesure de probabilité borélienne et* $\epsilon > 0$,

   (a) *Montrer que:*
   $$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathcal{F}(\nu)(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{2\sin(\epsilon x)}{x}\nu(dx).$$

   (b) *En déduire que:*
   $$\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{2}{\epsilon}\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(1 - \mathcal{F}(\nu)(t)\right) dt.$$

3. *Montrer que* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est tendue.*

4. *Conclure la preuve du théorème.*

Exercice 20. *On considère la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *donnée par:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \infty[, f_n(t) = \sin\left(\sqrt{t + 4(n\pi)^2}\right).$$

1. *Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers* 0.

2. *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet-elle une sous-suite qui converge uniformément? Commenter.*

Exercice 21. *Soit* $K : C([a, b]) \to C([a, b])$ *donnée par:*

$$\forall s \in [a, b], (Kf)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt,$$

où $k \in C([a, b] \times [a, b])$, *et soit* (f_n) *une suite bornée de* $X = (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$. *Montrer que* (Kf_n) *admet une sous-suite uniformément convergente.*

Exercice 22. *Dans le cours, on a définie la tribu cylindrique sur $C([0,1],E)$ comme la tribu engendrée par les applications évaluations. En fait, cette même définition nous donne une tribu sur l'espace de toutes les fonctions de $[0,1]$ dans E appelée la tribu produit. Montrer que, par exemple si $E=\mathbb{R}$, $C([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas mesurable pour la tribu produit.*

Exercice 23. *Soit (E,d) un espace polonais dans lequel les fermés bornés sont compacts. Soit Γ une partie de $\mathcal{M}(\mathcal{W}(E))$. On suppose que:*

- $\{\mu^0; \mu \in \Gamma\}$ *est tendue.*
- *Pour tous $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que:*

$$\forall \mu \in \Gamma, \mu\left(\{x \in \mathcal{W}(E); \omega(x,\delta) \leq \eta\}\right) \geq 1-\epsilon.$$

Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $\{\mu^t; \mu \in \Gamma\}$ est tendue.

Exercice 24. *Soient X_n, $n \geq 0$, et X des processus croissants, continus, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que X_n converge en loi vers X pour la topologie uniforme sur C si et seulement si X_n converge vers X au sens des marginales de dimensions finies.*

Exercice 25. *Montrer le théorème de Donsker dans le cas où les variables aléatoires ont un moment d'ordre 4.*

Exercice 26. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées et de variance 1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{X_1+\cdots X_i}{\sqrt{i}}\right) \Rightarrow \int_0^1 f(B_s)ds,$$

où B est un mouvement brownien standard.

Exercice 27. *Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées et de variance 1. On pose:*

$$S_n = X_1+\cdots+X_n \text{ et } M_n = \max_{1\leq i\leq n} S_i.$$

On définit $g: C([0,1]) \to \mathbb{R}$ par:

$$\forall f \in C([0,1]), g(f) = \sup_{t\in[0,1]} f(t).$$

1. *Montrer que g est mesurable.*
2. *Montrer que:*

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow g(B),$$

où B est un mouvement Brownien standard.

Ce résultat nous dit que si l'on connaît la loi de $\sup_{t\in[0,1]} B_t$, *on connaît la distribution limite de* $\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ *quelle que soit la suite de variable i.i.d.* $(X_n)_{n\geq 1}$ *correspondante. Dans la suite de l'exercice, on se propose de calculer la loi de* $\sup_{t\in[0,1]} B_t$. *On se place alors dans le cas particulier où* $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$.

3. *Montrer que pour tout entier positif a:*

$$\mathbb{P}(M_n \geq a) = 2\mathbb{P}(S_n > a) + \mathbb{P}(S_n = a).$$

4. *En déduire que* $\sup_{t\in[0,1]} B(t) \sim |N|$ *où* $N \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 28 (Loi des grands nombres fonctionnelle.)**.** *Soit* $(X_i)_{i\geq 1}$ *des variables aléatoires i.i.d. réelles ayant un moment d'ordre 1. Pour* $n \geq 1$ *, on considère le processus aléatoire:*

$$S_n(t) = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{[nt]} + (nt - \lfloor nt \rfloor)X_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{n}, t \in [0,1].$$

Montrer que:

$$(S_n(t))_{0\leq t\leq 1} \xrightarrow{p.s.} (t \mapsto E[X_1]t)_{0\leq t\leq 1} \quad \text{lorsque } n\to\infty.$$

Exercice 29. *On se place sur l'espace de Banach* $C([0,1])$ *des fonctions continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$, *muni de sa tribu borélienne. On munit l'espace* $\mathcal{M}(C([0,1]))$ *des mesures de probabilités boréliennes sur* $C([0,1])$ *de la topologie de la convergence faible.*

Pour tout réel $H \in]0,1[$, *on admettra l'existence et l'unicité d'un élément* P_H *de* $\mathcal{M}(C([0,1]))$ *tel que sous* P_H, *le processus canonique* $(W_t)_{t\in[0,1]}$ *soit gaussien et centré, de covariance donnée par la formule suivante:*

$$\forall s,t \in [0,1], \quad E^{P_H}[W_s W_t] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right).$$

On peut noter que pour $H = \frac{1}{2}$, P_H *est la mesure de Wiener. Un processus de loi* P_H *s'appelle un mouvement brownien fractionnaire d'exposant de Hurst* H.

1. *Montrer que si* Z *est une variable aléatoire gaussienne centrée, alors* $E[Z^4] = 3E[Z^2]^2$.

2. *Montrer que l'application* $H \mapsto P_H$ *de* $]0,1[$ *dans* $\mathcal{M}(C([0,1]))$ *est continue.*

3. *Soit* $H \in]0,1[$ *et soit* $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ *un processus de loi* P_H. *Montrer que pour tout* $\alpha \in]0,H[$, *les trajectoires de* X *sont presque sûrement Höldériennes d'exposant* α.

Exercice 30. *On se place sur l'espace de Banach* $C([0,1])$ *des fonctions continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$, *muni de sa tribu borélienne. On munit l'espace* $\mathcal{M}(C[0,1])$ *des mesures de probabilité boréliennes sur* $C([0,1])$ *de la topologie de la convergence faible. Pour tout réel* $\theta > 0$, *on admettra l'existence et l'unicité d'un élément* P_θ *de* $\mathcal{M}(C[0,1])$ *tel que sous* P_θ, *le processus canonique* $(W_t)_{t\in[0,1]}$ *soit gaussien et centré, de covariance donnée par la formule suivante:*

$$\forall s,t \in [0,1], E_\theta[W_s W_t] = \frac{1}{2\theta}(e^{-\theta|t-s|} - e^{-\theta(t+s)}).$$

Un processus de loi P_θ *s'appelle un processus d'Ornstein–Uhlenbeck de paramètre* θ.

1. *Montrer que si* Z *est une variable aléatoire gaussienne centrée, alors* $E[Z^4] = 3E[Z^2]^2$.
2. *Montrer que l'application* $\theta \mapsto P_\theta$ *de* $]0, +\infty[$ *dans* $M(C([0,1]))$ *est continue.*
3. *Soit* $\theta > 0$ *et soit* $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ *un processus de loi* P_θ. *Montrer que pour tout réel* $\alpha < \frac{1}{4}$, *les trajectoires de* X *sont presque sûrement Höldériennes d'exposant* α. *Peut-on dire mieux ?*
4. *La limite* $\lim_{\theta\to 0} P_\theta$ *existe-t-elle ? Et la limite* $\lim_{\theta\to\infty} P_\theta$ *?*