

Exercice 1. Soient (E, τ_E) et (F, τ_F) des espaces topologiques et $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est continue si, et seulement si :

$$\forall A \subset E, f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Exercice 2. Soient (E, τ_E) et (F, τ_F) des espaces topologiques compacts et $f : E \rightarrow F$ une application bijective et continue. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 3 (Bases et Sous-Bases de Topologie). Soit E un ensemble. Une base de topologie sur E est une collection Γ_E de sous-ensembles de E telle que :

- Tout $x \in E$ est contenu dans l'au moins un des éléments de Γ_E .
- Pour tout $x \in E$ qui se trouve à la fois dans deux éléments B_1 et B_2 de Γ_E , il existe un élément B_3 de Γ_E tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

On définit la classe τ_E sous-ensembles de E comme suit :

$$A \in \tau_E \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists B \in \Gamma_E; x \in B \subset A.$$

1. Montrer que τ_E est une topologie dont tout ouvert s'écrit comme réunion d'éléments de Γ_E . Cette topologie est dite engendrée par Γ_E .
2. Montrer que dans un espace métrique, l'ensemble des boules ouvertes de rayons rationnels est une base de topologie qui engendre la topologie métrique.

Considérons maintenant un autre ensemble F munit d'une base Γ_F qui engendre la topologie τ_F et $f : E \rightarrow F$.

3. Montrer que f est continue si, et seulement si :

$$\forall A \in \Gamma_F, f^{-1}(A) \in \tau_E.$$

Que signifie cette assertion dans le cas d'un espace métrique ?

Une sous-base \mathcal{S}_E de topologie de E est une collection de sous-ensembles de E dont la réunion est E .

4. Montrer que la classe des intersections finies d'éléments de \mathcal{S}_E est une base de topologie. La topologie engendrée est appelée topologie engendrée par \mathcal{S} .
5. Montrer que le résultat de la question 3 reste vrai en remplaçant $\forall A \in \Gamma_F$ par $\forall A \in \mathcal{S}_F$ où \mathcal{S}_F est une sous-base qui engendre τ_F .

Exercice 4 (Topologie Initiale). Soient I un ensemble d'indices et $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit F un ensemble. On considère pour tout $i \in I$ une application $\pi_i : F \rightarrow E_i$. On appelle topologie initiale relative à $((E_i, \tau_i)_{i \in I}, F, (\pi_i)_{i \in I})$ la topologie la plus petite sur F rendant continues toutes les applications π_i . Pour $i \in I, O \in \tau_i$, on pose : $S_{i,O} = \pi_i^{-1}(O)$.

1. Montrer que $\{S_{i,O}; O \in \tau_i, i \in I\}$ est une sous-base.
2. En déduire que la topologie engendrée par cette sous-base est la topologie initiale.
3. Faire le lien avec la topologie faible- $*$.
4. Soit (G, Σ) un troisième espace topologique et $Z : G \rightarrow F$ une application. Montrer que Z est continue si, et seulement si pour tout $i \in I$, $\pi_i \circ Z$ est une application continue de G dans E_i .

Exercice 5 (Topologie Produit). Soient I un ensemble d'indices et $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. On définit le produit $\prod_{i \in I} E_i$ par:

$$\prod_{i \in I} E_i = \left\{ \Phi : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i; \forall i \in I, \Phi(i) \in E_i \right\},$$

et on y pense bien sûr comme une famille $(u_i)_{i \in I}$ dont chaque u_i est dans E_i . On définit de plus les applications projections comme suit. Pour $j \in I$, $\pi_j : x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i \mapsto \pi_j(x) = x_j \in E_j$. La topologie produit est la topologie initiale relative $((E_i, \tau_i)_{i \in I}, \prod_{i \in I} E_i, (\pi_i)_{i \in I})$

1. Donner la forme d'un ouvert de $\prod_{i \in I} E_i$.
2. Montrer que si I est dénombrable et les E_i sont séparables, alors $\prod_{i \in I} E_i$ est séparable.
3. Montrer que si I est fini et les E_i sont des espaces métriques de distance d_i , alors la topologie produit n'est autre que celle de l'espace métrique produit, c'est à dire engendrée (entre autres) par la distance d définie par:

$$\forall x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i, d(x, y) = \sum_{i \in I} d_i(x_i, y_i).$$

4. On considère maintenant le cas où $I = \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, E_i est un espace métrique de distance d_i . On définit $d : \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \times \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \rightarrow \mathbb{R}^+$ par:

$$\forall x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i, d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}.$$

- (a) Montrer que d est une distance.
 - (b) Montrer que la topologie induite par d coïncide avec la topologie produit.
 - (c) Montrer qu'une suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour d si, et seulement si elle converge composante par composante.
5. Montrer que le produit dénombrable d'espaces polonais est polonais.

Exercice 6 (Topologie de Kuratowski). Dans cet exercice, on souhaite caractériser une topologie par une approche opératoire, notamment par les opérateurs de fermeture et

d'intérieur. On va commencer par se donner un espace topologique (E, τ) et considérer l'opérateur $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ défini par:

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), fA = \bar{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F.$$

Dans un premier temps, on va exhiber des propriétés importantes de f puis dans un second temps montrer que la donnée d'un opérateur vérifiant de telles propriétés induit une topologie.

1. Montrer les propriétés suivantes de f :

- (a) $f\emptyset = \emptyset$.
- (b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \subset B \Rightarrow fA \subset fB$.
- (c) $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f(A)$.
- (d) $f \circ f = f$.
- (e) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cup B) = fA \cup fB$.

A-t-on nécessairement $f(A \cap B) = fA \cap fB$? Prouver ou donner un contre exemple.

On se donne maintenant un ensemble E et un opérateur $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ qui vérifie les propriétés (a) à (e) de la question précédente. On pose:

$$\tau = \{O \in \mathcal{P}(E); fcO = cO\},$$

où c désigne l'opérateur de complémentation.

- 2. Montrer que τ est une topologie telle que l'adhérence d'une partie A est fA .
- 3. Peut-on vérifier la continuité des applications entre deux espaces topologiques en utilisant exclusivement f ?
- 4. Expliquer comment peut-on retrouver rapidement ce qui précède en utilisant un opérateur d'intérieur i à la place d'un opérateur de fermeture.
- 5. Dans cette question, il s'agit de faire un petit jeu. Si on prend un ensemble A , on peut s'amuser à construire $iA, fiA, ifiA, icA, \dots$. En prenant

$$A = [0, 1[\cup]1, 2] \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$$

dans la topologie usuelle de \mathbb{R} , montrer que l'on peut former au moins 14 ensembles différents. Montrer qu'en fait ce nombre 14 est maximal.

Exercice 7 (Preuve topologique de Furstenberg sur l'infinité des nombres premiers). Dans cet exercice, on se propose de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini par un moyen topologique. On se place dans \mathbb{Z} et pour $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}$, on définit:

$$S(a, b) = \{na + b; n \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z} + b.$$

1. Montrer que $(S(a, b))_{(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}}$ est une base de topologie sur \mathbb{Z} . On munit alors \mathbb{Z} de la topologie induite par cette base.
2. Montrer que les $S(a, b)$ sont aussi fermés.
3. Montrer que:

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ premier}} S(p, 0),$$

et en déduire que l'ensemble des nombres premiers ne peut pas être fini.

Exercice 8. Le but de cet exercice est de montrer que tout sous-ensemble fermé ou ouvert d'un espace polonais est polonais. Soit E un espace polonais.

1. Soit $F \subset E$ un fermé. Montrer que F est polonais.

On considère maintenant U un ouvert propre de E . Soit d une distance sur E telle que (E, d) soit complet. On définit $d_0 : U \times U \rightarrow \mathbb{R}_+$ par:

$$\forall x, y \in U, d_0(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, U^c)} - \frac{1}{d(y, U^c)} \right|.$$

2. Montrer que d_0 définit une distance sur U .
3. Montrer que d_0 induit sur U la topologie trace de E sur U .
4. Montrer que (U, d_0) est un espace métrique complet. Conclure.

Exercice 9. Soit $C([0, +\infty[)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1. On définit sur $C([0, +\infty[) \times C([0, +\infty[)$ l'application d :

$$\forall f, g \in C([0, +\infty[), d(f, g) = \sup\{1 \wedge |f(t) - g(t)|; t \in [0, +\infty[\}.$$

- (a) Montrer que d définit une distance sur $C([0, +\infty[)$.
 - (b) On suppose que f et f_1, f_2, \dots appartiennent à $C([0, +\infty[)$. Montrer que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers f pour d si, et seulement si elle converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.
 - (c) Montrer que $C([0, +\infty[)$, muni de d n'est pas séparable et donc n'est pas polonais.
2. On définit sur $C([0, +\infty[) \times C([0, +\infty[)$ l'application D :

$$\forall f, g \in C([0, +\infty[), \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sup\{1 \wedge |f(t) - g(t)|; t \in [0, n] \}.$$

- (a) Montrer que D est une distance.

(b) On suppose que f et f_1, f_2, \dots appartiennent à $C([0, +\infty[)$. Montrer que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers f pour D si, et seulement si elle converge uniformément vers f sur tout les sous-ensembles compacts de $[0, +\infty[$.

(c) Montrer que munit de D , $C([0, +\infty[)$ est polonais.

Exercice 10. Soient (E, τ_E) et (F, τ_F) deux espaces polonais, et $f : E \rightarrow F$ une fonction continue. Montrer que $\Lambda : \mathcal{M}(E) \rightarrow \mathcal{M}(F)$ définie par :

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(E), \Lambda(\mu) = \mu \circ f^{-1}$$

est continue.

Exercice 11. Soit X un espace topologique métrisable. Pour $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$, on définit la distance en variation totale entre μ et ν par :

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

1. Montrer que si $d_{VT}(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ alors $\mu_n \Rightarrow \mu$.

2. La réciproque est-elle vraie en générale ?

3. Montrer que si $X = \mathbb{Z}$ alors cette distance métrise la convergence en loi. Montrer ainsi que dans ce cas :

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mu(k) - \nu(k)|.$$

Exercice 12 (Distance de Lévy-Prohorov). Soit (X, d) un espace métrique séparable. On définit sur $\mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X)$ l'application suivante :

$$(\mu, \nu) \mapsto d_{LP}(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0; \forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \leq \nu(A^\epsilon) + \epsilon \text{ et } \nu(A) \leq \mu(A^\epsilon) + \epsilon\},$$

où pour $A \subset X$ et $\epsilon \geq 0$ on note

$$A^\epsilon = \{x \in X; \exists y \in A \text{ avec } d(x, y) < \epsilon\}.$$

1. Pour $x, y \in X$, calculer $d_{LP}(\delta_x, \delta_y)$.

2. Montrer que d_{LP} est une distance sur $\mathcal{M}(X)$.

3. Montrer que l'on a en fait :

$$d_{LP}(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0; \forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \leq \nu(A^\epsilon) + \epsilon\}.$$

4. Montrer que si μ, μ_1, μ_2, \dots sont des éléments de $\mathcal{M}(X)$ tels que $d_{LP}(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors $\mu_n \Rightarrow \mu$.

On veut montrer maintenant que l'on a réciproquement : si μ, μ_1, μ_2, \dots sont des éléments de $\mathcal{M}(X)$ tels que $\mu_n \Rightarrow \mu$, alors $d_{LP}(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans X . Fixons $\epsilon > 0$.

5. Montrer qu'il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\mu \left(\bigcup_{i=0}^m B(x_i, \epsilon) \right) \geq 1 - \epsilon.$$

Soit \mathcal{U} l'ensemble des ouverts de la forme :

$$\bigcup_{i \in J} B(x_i, \epsilon), J \subset \{1, \dots, m\}.$$

6. Montrer que pour n assez grand :

$$\forall U \in \mathcal{U}, \mu_n(U) \geq \mu(U) - \epsilon.$$

Pour $A \in \mathcal{B}(X)$, on pose:

$$U(A) = \bigcup_{i=1, \dots, m; A \cap B(x_i, \epsilon) \neq \emptyset} B(x_i, \epsilon).$$

7. Montrer que pour n assez grand, on a $\mu(A) \leq \mu_n(U(A)) + 2\epsilon$.

8. Conclure que $d_{LP}(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

9. En déduire que d_{LP} métrise la topologie de la convergence en loi sur $\mathcal{M}(X)$.

Exercice 13. On travaille sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\frac{i}{n}}.$$

Montrer que $\mu_n \Rightarrow \lambda$, la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes la suite de mesures δ_{u_n} est tendue ?

Exercice 15. Montrer que toute suite de variables aléatoires réelles bornée dans L^1 admet une sous-suite qui converge en loi.

Exercice 16. Soit μ une mesure de probabilité tendue sur un espace métrique (E, d) . Montrer qu'il existe un borélien $A \subset E$ tel que (A, d) soit séparable et $\mu(A) = 1$.

Exercice 17. Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques, et Γ une famille de mesure borélienne sur $E_1 \times E_2$. Montrer que Γ est tendue si, et seulement si les deux familles:

$$\{\mu(\cdot \times E_2); \mu \in \Gamma\} \text{ et } \{\mu(E_1 \times \cdot); \mu \in \Gamma\}$$

sont tendues.

Exercice 18 ($\mathcal{M}(E)$ compact $\Rightarrow E$ compact.). Soit (E, d) un espace métrique séparable.

1. Montrer que l'application $F : x \mapsto \delta_x$ est un homéomorphisme de E sur $E_0 = \{\delta_y, y \in E\} \subset M(E)$.

Soit $\mu_n = \delta_{x_n}$ une suite de E_0 qui converge étroitement vers μ .

2. On suppose que $(x_n)_{n \geq 1}$ n'admet aucune sous-suite convergente. Montrer que $\{x_n\}_{n \geq 1}$ est un fermé, ainsi que toutes ses parties.
3. Montrer que cela est contradictoire avec la convergence étroite de $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et en déduire que $(x_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite convergente.
4. En déduire que E_0 est un fermé de $\mathcal{M}(E)$, et puis que si $\mathcal{M}(E)$ est compact, alors E est compact.

Exercice 19 (Le Théorème de Paul Lévy). Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur \mathbb{R} . On définit sa transformée de Fourier par:

$$\mathcal{F}(\mu) : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) \mu(dx).$$

On veut montrer le théorème de Paul Lévy suivant:

Théorème. Soient μ et μ_1, μ_2, \dots des mesures de probabilité boréliennes sur \mathbb{R} . Alors la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers μ si, et seulement si la suite $\mathcal{F}(\mu_n)$ converge simplement vers $\mathcal{F}(\mu)$.

1. Montrer le sens "facile" du théorème.
2. Soient ν une mesure de probabilité borélienne et $\epsilon > 0$,

(a) Montrer que:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathcal{F}(\nu)(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin(\epsilon x)}{x} \nu(dx).$$

(b) En déduire que:

$$\nu \left(\left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{2}{\epsilon} \right\} \right) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (1 - \mathcal{F}(\nu)(t)) dt.$$

3. Montrer que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue.
4. Conclure la preuve du théorème.

Exercice 20. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \infty[, f_n(t) = \sin \left(\sqrt{t + 4(n\pi)^2} \right).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers 0.

2. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une sous-suite qui converge uniformément? Commenter.

Exercice 21. Soit $K : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ donnée par:

$$\forall s \in [a, b], (Kf)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt,$$

où $k \in C([a, b] \times [a, b])$, et soit (f_n) une suite bornée de $X = (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que (Kf_n) admet une sous-suite uniformément convergente.

Exercice 22. Dans le cours, on a définie la tribu cylindrique sur $C([0, 1], E)$ comme la tribu engendrée par les applications évaluations. En fait, cette même définition nous donne une tribu sur l'espace de toutes les fonctions de $[0, 1]$ dans E appelée la tribu produit. Montrer que, par exemple si $E = \mathbb{R}$, $C([0, 1], \mathbb{R})$ n'est pas mesurable pour la tribu produit.

Exercice 23. Soit (E, d) un espace polonais dans lequel les fermés bornés sont compacts. Soit Γ une partie de $\mathcal{M}(\mathcal{W}(E))$. On suppose que:

- $\{\mu^0; \mu \in \Gamma\}$ est tendue.
- Pour tous $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que:

$$\forall \mu \in \Gamma, \mu(\{x \in \mathcal{W}(E); \omega(x, \delta) \leq \eta\}) \geq 1 - \epsilon.$$

Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\{\mu^t; \mu \in \Gamma\}$ est tendue.

Exercice 24. Soient $X_n, n \geq 0$, et X des processus croissants, continus, de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Montrer que X_n converge en loi vers X pour la topologie uniforme sur $C([0, 1])$ si, et seulement si X_n converge vers X au sens des marginales de dimensions finies.

Exercice 25. Montrer le théorème de Donsker dans le cas où les variables aléatoires ont un moment d'ordre 4.

Exercice 26. Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées et de variance 1. On pose:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \text{ et } M_n = \max_{1 \leq i \leq n} S_i.$$

On définit $g : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ par:

$$\forall f \in C([0, 1]), g(f) = \sup_{t \in [0, 1]} f(t).$$

1. Montrer que g est mesurable.

2. Montrer que:

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow g(B),$$

où B est un mouvement Brownien standard.

Ce résultat nous dit que si l'on connaît la loi de $\sup_{t \in [0,1]} B_t$, on connaît la distribution limite de $\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ quelle que soit la suite de variable i.i.d. $(X_n)_{n \geq 1}$ correspondante. Dans la suite de l'exercice, on se propose de calculer la loi de $\sup_{t \in [0,1]} B_t$. On se place alors dans le cas particulier où $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$.

3. Montrer que pour tout entier positif a :

$$\mathbb{P}(M_n \geq a) = 2\mathbb{P}(S_n > a) + \mathbb{P}(S_n = a).$$

4. En déduire que $\sup_{t \in [0,1]} B(t) \sim |N|$ où $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 27. On se place sur l'espace de Banach $C([0, 1])$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , muni de sa tribu borélienne. On munit l'espace $\mathcal{M}(C([0, 1]))$ des mesures de probabilités boréliennes sur $C([0, 1])$ de la topologie de la convergence faible.

Pour tout réel $H \in]0, 1[$, on admettra l'existence et l'unicité d'un élément P_H de $\mathcal{M}(C([0, 1]))$ tel que sous P_H , le processus canonique $(W_t)_{t \in [0,1]}$ soit gaussien et centré, de covariance donnée par la formule suivante:

$$\forall s, t \in [0, 1], \quad E^{P_H}[W_s W_t] = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H}).$$

On peut noter que pour $H = \frac{1}{2}$, P_H est la mesure de Wiener. Un processus de loi P_H s'appelle un mouvement brownien fractionnaire d'exposant de Hurst H .

1. Montrer que si Z est une variable aléatoire gaussienne centrée, alors $E[Z^4] = 3E[Z^2]^2$.
2. Montrer que l'application $H \mapsto P_H$ de $]0, 1[$ dans $\mathcal{M}(C([0, 1]))$ est continue.
3. Soit $H \in]0, 1[$ et soit $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ un processus de loi P_H . Montrer que pour tout $\alpha \in]0, H[$, les trajectoires de X sont presque sûrement Höldériennes d'exposant α .

Exercice 28. On se place sur l'espace de Banach $C([0, 1])$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , muni de sa tribu borélienne. On munit l'espace $\mathcal{M}(C[0, 1])$ des mesures de probabilité boréliennes sur $C([0, 1])$ de la topologie de la convergence faible. Pour tout réel $\theta > 0$, on admettra l'existence et l'unicité d'un élément P_θ de $\mathcal{M}(C[0, 1])$ tel que sous P_θ , le processus canonique $(W_t)_{t \in [0,1]}$ soit gaussien et centré, de covariance donnée par la formule suivante:

$$\forall s, t \in [0, 1], \quad E_\theta[W_s W_t] = \frac{1}{2\theta} (e^{-\theta|t-s|} - e^{-\theta(t+s)}).$$

Un processus de loi P_θ s'appelle un processus d'Ornstein–Uhlenbeck de paramètre θ .

1. Montrer que si Z est une variable aléatoire gaussienne centrée, alors $E[Z^4] = 3E[Z^2]^2$.
2. Montrer que l'application $\theta \mapsto P_\theta$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathcal{M}(C([0, 1]))$ est continue.
3. Soit $\theta > 0$ et soit $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ un processus de loi P_θ . Montrer que pour tout réel $\alpha < \frac{1}{4}$, les trajectoires de X sont presque sûrement Höldériennes d'exposant α . Peut-on dire mieux ?

4. La limite $\lim_{\theta \rightarrow 0} P_\theta$ existe-t-elle ? Et la limite $\lim_{\theta \rightarrow \infty} P_\theta$?

Exercice 29. On considère l'espace $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, muni de sa tribu borélienne. On considère sur cet espace la mesure de Wiener \mathbb{W} qui est la loi d'un mouvement brownien standard sur $[0, 1]$. Dans le cours, on a vu qu'une mesure sur un espace polonais est toujours tendue. Le but de cet exercice est d'exhiber des compacts explicites qui vérifient la propriété de tension.

1. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de $C([0, 1], \mathbb{R})$ et une norme $\|\cdot\|_H$ sur H tels que :

- $(H, \|\cdot\|_H)$ soit un espace de Banach,
- l'injection canonique $i : (H, \|\cdot\|_H) \rightarrow (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ soit compacte,
- $\mathbb{W}(H) = 1$.

2. En déduire que \mathbb{W} est tendue.

3. Existe-t-il un compact K de $C([0, 1], \mathbb{R})$ tel que $\mathbb{W}(K) = 1$? Justifier.

Exercice 30. Partie A. Soit (E, τ) un espace topologique. On dit que (E, τ) possède la propriété de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

1. Montrer qu'il est équivalent de dire que (E, τ) possède la propriété de Baire si, et seulement si toute union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.
2. Montrer qu'un espace topologique métrisable par une distance complète possède la propriété de Baire.

Partie B. On souhaite maintenant utiliser la partie A pour montrer que l'espace $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ des mesures boréliennes finies sur \mathbb{R} n'est pas polonais pour la topologie de la convergence vague, définie comme étant la topologie la plus petite sur $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ rendant continues les formes linéaires de la forme : $\mu \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f d\mu$ où $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \{\mu \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}); \mu(E) \leq n\}.$$

1. Montrer que F_n est fermé.
2. Montrer que F_n est d'intérieur vide.
3. Montrer alors que $\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$ ne possède pas la propriété de Baire. Conclure.

Exercice 31. Soit Λ un ensemble non-vide d'indices totalement ordonné. On considère une famille d'espaces polonais muni chacun d'une mesure de probabilité borélienne $(X_\alpha, \mathbb{P}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. On se donne de plus, pour tout $\lambda \leq \alpha \in \Lambda$, une application continue $f_{\alpha, \lambda} : X_\alpha \rightarrow X_\lambda$ telles que pour tous $\lambda \leq \alpha \leq \nu$:

1. $f_{\alpha, \alpha} = Id$,
2. $f_{\nu, \lambda} = f_{\alpha, \lambda} \circ f_{\nu, \alpha}$,

$$3. \mathbb{P}_\lambda = \mathbb{P}_\alpha \circ f_{\alpha,\lambda}^{-1}.$$

On considère de plus un espace polonais X et des applications continues $f_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$. On veut montrer qu'il existe une mesure de probabilité borélienne \mathbb{P} sur X telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\mathbb{P}_\lambda = \mathbb{P} \circ f_\lambda^{-1}$, si et seulement si :

$$\star \forall \epsilon > 0, \exists K_\epsilon \text{ compact de } X ; \forall \alpha \in \Lambda, \mathbb{P}_\alpha(f_\alpha(K_\epsilon)) \geq 1 - \epsilon$$

1. Montrer que l'existence de \mathbb{P} implique la condition \star .

On s'intéresse maintenant à la réciproque.

2. Montrer qu'il existe une suite croissante de compacts $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X telle que :

$$\forall \alpha \in \Lambda, \mathbb{P}_\alpha(f_\alpha(K_n)) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Soit

$$M = \{\mu \in \mathcal{M}(X); \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \Lambda, \mu(K_n) \geq 1 - \frac{1}{n}\}.$$

3. Montrer que M est non-vide et relativement compact dans $\mathcal{M}(X)$.

On pose maintenant, pour $\alpha \in \Lambda$,

$$M_\alpha = \{\mu \in \bar{M}; \mu \circ f_\alpha^{-1} = \mathbb{P}_\alpha\}.$$

4. Montrer que M_α est compact.

5. Montrer que si $\alpha \leq \beta$, alors $M_\beta \subset M_\alpha$.

6. Montrer que si pour tout α , M_α est non-vide, alors on a bien l'existence de \mathbb{P} .

Dans la suite, on va montrer que les M_α sont effectivement non-vide. Soit $\alpha \in \Lambda$. Soit B_α le sous-espace de $C_b(X)$ formé des fonctions de la forme $\phi \circ f_\alpha$ où $\phi \in C_b(X_\alpha)$. On définit sur B_α la forme linéaire

$$L : \phi \circ f_\alpha \mapsto \int_{X_\alpha} \phi d\mathbb{P}_\alpha.$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|L(\phi \circ f_\alpha)| \leq \|\phi \circ f_\alpha\|_{C_b(X)} + \frac{\|\phi\|_{C_b(X_\alpha)}}{n},$$

et en déduire que L est continue.

8. En appliquant le théorème de Hahn-Banach, montrer que L s'étend en une forme linéaire continue sur $C_b(X)$.

9. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, montrer l'existence d'un élément dans M_α .