

Fonctions de Green et frontières de Martin de diffusions planaires transientes : une approche analytique.

Maxence Petit

Encadré par Irina Kourkova et Sandro Franceschi

Soutenance de thèse

1er juin 2026

Introduction

- Théorie de la **frontière de Martin** [Martin 1941, Doob 1984, Kunita et Watanabe 1965 ...]
- **Littérature** : Frontière de Martin de **diffusions classiques** [Pinsky 1995, Murata 1990], de **Browniens tués** sur le bord de domaines non bornés [DeBlassie 2008-2009, Franceschi 2024], ...
- Processus de **diffusion** avec **comportements frontières** (réflexion [Taylor et Williams 1993], barrière perméable [Lejay 2011, Portenko et Kopytko 2012])

Introduction

- Théorie de la **frontière de Martin** [Martin 1941, Doob 1984, Kunita et Watanabe 1965 ...]
- **Littérature** : Frontière de Martin de **diffusions classiques** [Pinsky 1995, Murata 1990], de **Browniens tués** sur le bord de domaines non bornés [DeBlassie 2008-2009, Franceschi 2024], ...
- Processus de **diffusion** avec **comportements frontières** (réflexion [Taylor et Williams 1993], barrière perméable [Lejay 2011, Portenko et Kopytko 2012])

But :

- ▶ Asymptotique des fonctions de Green et frontière de Martin
- ▶ Fonctions harmoniques positives

Plan

I. Processus et questions principales

- A. Diffusions planaires avec comportements frontière
- B. Fonctions harmoniques et fonctions de Green

II. Equation fonctionnelle

III. Asymptotique des fonctions de Green et frontière de Martin

- A. Méthode du point col
- B. Résultats d'asymptotique

IV. Méthode par compensation

I. Processus et questions principales

Plan

I. Processus et questions principales

A. Diffusions planaires avec comportements frontière

B. Fonctions harmoniques et fonctions de Green

II. Equation fonctionnelle

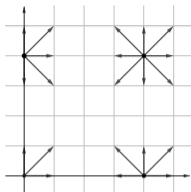
III. Asymptotique des fonctions de Green et frontière de Martin

A. Méthode du point col

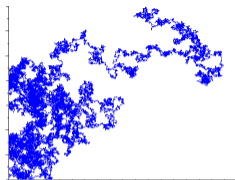
B. Résultats d'asymptotique

IV. Méthode par compensation

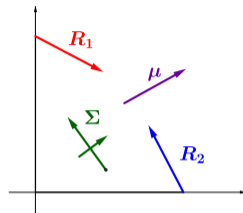
Phénomène de réflexion



Marche aléatoire réfléchie



Brownien réfléchi non dégénéré



Paramètres

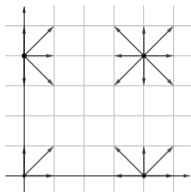
Le mouvement Brownien réfléchi obliquement satisfait

$$dZ_t = \sqrt{\Sigma}dW_t + \mu dt + R_1 dL_t^1 + R_2 dL_t^2$$

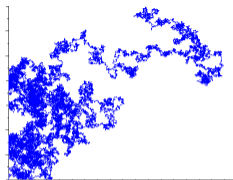
où

- ▶ $\sqrt{\Sigma}W$ est un mouvement Brownien de covariance $\sqrt{\Sigma}$
- ▶ $\mu \in \mathbb{R}^2$ est le drift
- ▶ L^1 et L^2 sont les temps locaux sur les axes
- ▶ R_1 et R_2 sont les directions de réflexion

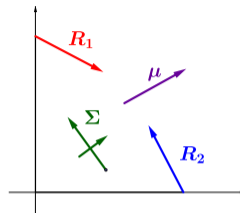
Phénomène de réflexion



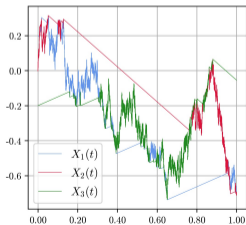
Marche aléatoire réfléchi



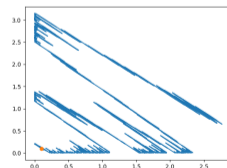
Brownien réfléchi non dégénéré



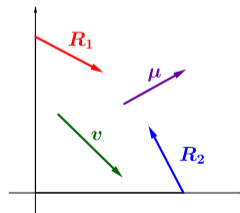
Paramètres



Système de particules

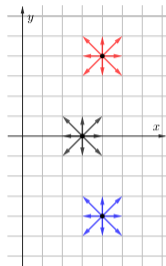


Brownien réfléchi dégénéré

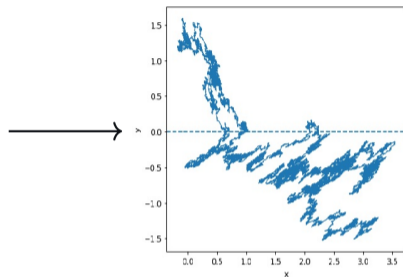


Paramètres

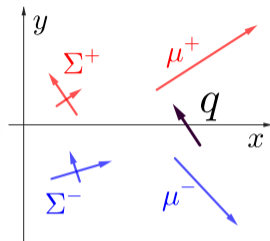
Paroi poreuse entre deux milieux



Marche aléatoire dans
deux demis plans



Diffusion avec
barrière perméable



Paramètres

La diffusion avec barrière perméable satisfait $dZ_t = \sqrt{\Sigma(Z_t)}dW_t + \mu(Z_t)dt + qdL_t$ où :

- ▶ $\Sigma(z) = \Sigma^+ \mathbb{1}_{z^2 > 0} + \Sigma^- \mathbb{1}_{z^2 < 0}$ est la covariance
- ▶ $\mu(z) = \mu^+ \mathbb{1}_{z^2 > 0} + \mu^- \mathbb{1}_{z^2 < 0}$ est le drift
- ▶ L est le temps local sur l'axe x , q est la direction du drift local

Plan

I. Processus et questions principales

- A. Diffusions planaires avec comportements frontière
- B. Fonctions harmoniques et fonctions de Green

II. Equation fonctionnelle

III. Asymptotique des fonctions de Green et frontière de Martin

- A. Méthode du point col
- B. Résultats d'asymptotique

IV. Méthode par compensation

Fonction harmonique

Cas standard

Si D est un domaine de \mathbb{R}^d et si $h : D \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$, alors

$$\Delta h = 0 \text{ sur } D \iff \forall B(x, r) \Subset D, h(x) = \int_{\partial B(x, r)} h(u) \frac{\sigma(du)}{\sigma(\partial B(x, r))}$$

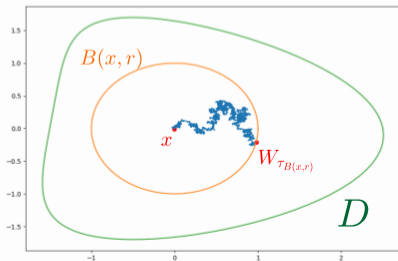
Fonction harmonique

Cas standard

Si D est un domaine de \mathbb{R}^d et si $h : D \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$, alors

$$\underbrace{\Delta h}_{\text{générateur}} = 0 \text{ sur } D \iff \forall B(x, r) \Subset D, h(x) = \int_{\partial B(x, r)} h(u) \frac{\sigma(du)}{\sigma(\partial B(x, r))} = \mathbb{E}_x \left[h(W_{\tau_{B(x, r)}}) \right]$$

où W est un mouvement Brownien et $\tau_{B(x, r)} = \inf\{t \geq 0, W_t \notin B(x, r)\}$.



Fonction harmonique

Cas standard

Si D est un domaine de \mathbb{R}^d et si $h : D \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$, alors

$$\underbrace{\Delta h = 0}_{\text{générateur}} \text{ sur } D \iff \forall B(x, r) \Subset D, h(x) = \int_{\partial B(x, r)} h(u) \frac{\sigma(du)}{\sigma(\partial B(x, r))} = \mathbb{E}_x \left[h(W_{\tau_{B(x, r)}}) \right]$$

où W est un mouvement Brownien et $\tau_{B(x, r)} = \inf\{t \geq 0, W_t \notin B(x, r)\}$.

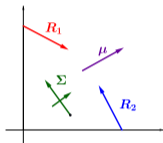
Définition (généralisation)

Si X est un processus de Markov sur $E \subset \mathbb{R}^d$, on dit qu'une fonction $h : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est **harmonique pour X** si pour tout ouvert $U \Subset E$,

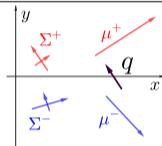
$$h(x) = \mathbb{E}_x [h(X_{\tau_U}) \mathbb{1}_{\tau_U < \zeta}]$$

Fonction harmonique et EDP

Mouvement Brownien réfléchi



Diffusion avec barrière perméable



$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} \nabla \cdot \Sigma \nabla + \mu \cdot \nabla \right) h(z) = 0, & z \in (0, +\infty)^2 \\ (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, & y \geq 0 \\ (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} \nabla \cdot \Sigma^+ \nabla + \mu^+ \cdot \nabla \right) h(x, y) = 0, & x > 0 \\ \left(\frac{1}{2} \nabla \cdot \Sigma^- \nabla + \mu^- \cdot \nabla \right) h(x, y) = 0, & x < 0 \\ \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 + q_2 \end{pmatrix} \nabla h(x, 0^+) = \begin{pmatrix} -q_1 \\ 1 - q_2 \end{pmatrix} \nabla h(x, 0^-) \end{cases}$$

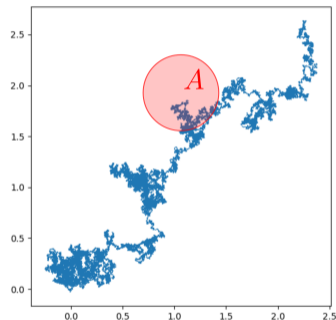
Fonction de Green

Hypothèse : processus transients.

Definition

Mesure de Green et fonction de Green :

$$G(z_0, A) = \mathbb{E}_{z_0} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_A(Z_t) dt \right]$$



Temps passé dans un ensemble A

Fonction de Green

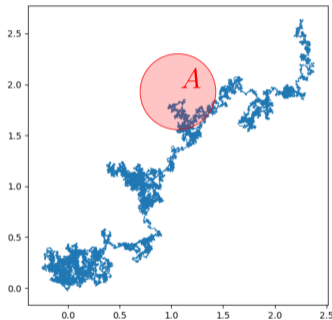
Hypothèse : processus transients.

Definition

Mesure de Green et fonction de Green :

$$\begin{aligned} G(z_0, A) &= \mathbb{E}_{z_0} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_A(Z_t) dt \right] \\ &= \int_A \underbrace{g^{z_0}(z)}_{\text{fonction de Green}} dz \end{aligned}$$

$g^{z_0}(z)$ = temps passé en moyenne en z ,
issu de z_0 (en densité)



Temps passé dans un ensemble A

Fonction de Green

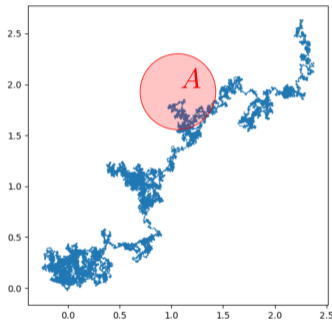
Hypothèse : processus transients.

Definition

Mesure de Green et fonction de Green :

$$\begin{aligned} G(z_0, A) &= \mathbb{E}_{z_0} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_A(Z_t) dt \right] \\ &= \int_A \underbrace{g^{z_0}(z)}_{\text{fonction de Green}} dz \end{aligned}$$

$g^{z_0}(z)$ = temps passé en moyenne en z ,
issu de z_0 (en densité)



Temps passé dans un ensemble A

Objectif, asymptotique typique

A z_0 fixé,

$$\mathbf{g}^{z_0}(\mathbf{z}) \underset{|\mathbf{z}| \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbf{h}(\mathbf{z}_0) |\mathbf{z}|^{\kappa} \mathbf{e}^{-\tau(\mathbf{z})},$$

Objectif, asymptotique typique

A z_0 fixé,

$$g^{z_0}(z) \underset{|z| \rightarrow +\infty}{\sim} h(z_0) |z|^\kappa e^{-\tau(z)},$$

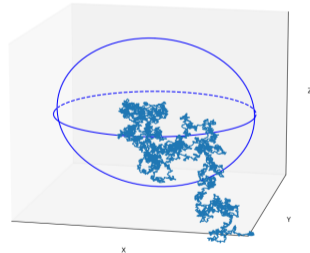
où

- ▶ $\tau(z)$ taux de décroissance
- ▶ κ exposant critique
- ▶ $h(z_0)$ est une **fonction harmonique** en z_0 .

Exemple de frontière de Martin : brownien drifté

On considère $(Z_t)_{t \geq 0} = (W_t + \mu t)_{t \geq 0}$ le mouvement Brownien avec drift $\mu \neq 0$.

$$g^{z_0}(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{|z-z_0-\mu t|^2}{2t}} \frac{dt}{2\pi t^{d/2}} \underset{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \frac{z}{|z|} \rightarrow u \in \mathbb{S}^{d-1}}}{\sim} (2\pi|\mu|)^{\frac{1-d}{2}} \underbrace{e^{-\langle \mu + |\mu|u, z_0 \rangle}}_{\substack{:= h_u(z_0) \\ \text{harmonique}}} \underbrace{|z|^{\frac{1-d}{2}}}_{\substack{\text{Décroissance} \\ \text{polynomiale}}} \underbrace{e^{-|z||\mu| + \langle \mu, z \rangle}}_{\substack{\text{Décroissance} \\ \text{exponentielle}}}$$

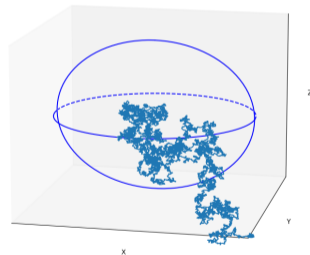


Exemple de frontière de Martin : brownien drifté

On considère $(Z_t)_{t \geq 0} = (W_t + \mu t)_{t \geq 0}$ le mouvement Brownien avec drift $\mu \neq 0$.

$$g^{z_0}(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{|z-z_0-\mu t|^2}{2t}} \frac{dt}{2\pi t^{d/2}} \underset{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \frac{z}{|z|} \rightarrow u \in \mathbb{S}^{d-1}}}{\sim} (2\pi|\mu|)^{\frac{1-d}{2}} \underbrace{e^{-\langle \mu + |\mu|u, z_0 \rangle}}_{\substack{:= h_u(z_0) \\ \text{harmonique}}} \underbrace{|z|^{\frac{1-d}{2}}}_{\substack{\text{Décroissance} \\ \text{polynomiale}}} \underbrace{e^{-|z||\mu| + \langle \mu, z \rangle}}_{\substack{\text{Décroissance} \\ \text{exponentielle}}}$$

La **frontière de Martin** $\Gamma (= \mathbb{S}^{d-1})$ encode l'ensemble des fonctions harmoniques positives.



Frontière de Martin du Brownien avec drift

Exemple de frontière de Martin : brownien drifté

On considère $(Z_t)_{t \geq 0} = (W_t + \mu t)_{t \geq 0}$ le mouvement Brownien avec drift $\mu \neq 0$.

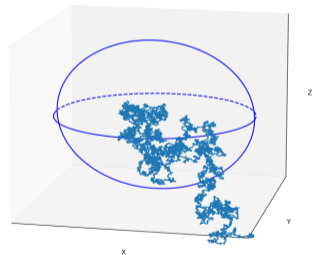
$$g^{z_0}(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{|z-z_0-\mu t|^2}{2t}} \frac{dt}{2\pi t^{d/2}} \underset{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \frac{z}{|z|} \rightarrow u \in \mathbb{S}^{d-1}}}{\sim} (2\pi|\mu|)^{\frac{1-d}{2}} \underbrace{e^{-\langle \mu + |\mu|u, z_0 \rangle}}_{\substack{:= h_u(z_0) \\ \text{harmonique}}} \underbrace{|z|^{\frac{1-d}{2}}}_{\substack{\text{Décroissance} \\ \text{polynomiale}}} \underbrace{e^{-|z||\mu| + \langle \mu, z \rangle}}_{\substack{\text{Décroissance} \\ \text{exponentielle}}}$$

La **frontière de Martin** $\Gamma (= \mathbb{S}^{d-1})$ encode l'ensemble des fonctions harmoniques positives.

Théorème (de représentation)

Si $h : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction harmonique, il existe une mesure μ sur Γ telle que

$$h(\cdot) = \int_{\Gamma} h_u(\cdot) \mu(du).$$



Frontière de Martin du Brownien avec drift

Exemple de frontière de Martin : brownien drifté

On considère $(Z_t)_{t \geq 0} = (W_t + \mu t)_{t \geq 0}$ le mouvement Brownien avec drift $\mu \neq 0$.

$$g^{z_0}(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{|z-z_0-\mu t|^2}{2t}} \frac{dt}{2\pi t^{d/2}} \underset{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \frac{z}{|z|} \rightarrow u \in \mathbb{S}^{d-1}}}{\sim} (2\pi|\mu|)^{\frac{1-d}{2}} \underbrace{e^{-\langle \mu + |\mu|u, z_0 \rangle}}_{\substack{:= h_u(z_0) \\ \text{harmonique}}} \underbrace{|z|^{\frac{1-d}{2}}}_{\substack{\text{Décroissance} \\ \text{polynomiale}}} \underbrace{e^{-|z||\mu| + \langle \mu, z \rangle}}_{\substack{\text{Décroissance} \\ \text{exponentielle}}}$$

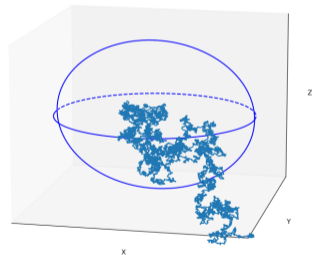
La frontière de Martin $\Gamma (= \mathbb{S}^{d-1})$ encode l'ensemble des fonctions harmoniques positives.

Théorème (de représentation)

Si $h : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction harmonique, il existe une **unique** mesure μ sur Γ_{\min} telle que

$$h(\cdot) = \int_{\Gamma_{\min}} h_u(\cdot) \mu(du)$$

où $\Gamma_{\min} = \{u \in \Gamma \mid h_u \text{ est harmonique minimale}\}$.



Frontière de Martin du Brownien avec drift

Plan d'attaque

Equation fonctionnelle à noyau(x)

liant des transformées de Laplace

Plan d'attaque

Equation fonctionnelle à noyau(x)
liant des transformées de Laplace

Etude des **branches** du/des noyau(x)

Plan d'attaque

Equation fonctionnelle à noyau(x)
liant des transformées de Laplace

Etude des **branches** du/des noyau(x)

Prolongement des trans-
formées de Laplace

```
graph TD; A["Equation fonctionnelle à noyau(x)  
liant des transformées de Laplace"] --> C["Prolongement des trans-  
formées de Laplace"]; B["Etude des branches du/des noyau(x)"] --> C;
```

Plan d'attaque

Equation fonctionnelle à noyau(x)
liant des transformées de Laplace

Etude des **branches** du/des noyau(x)

Prolongement des trans-
formées de Laplace

Inversion de Laplace et **méthode du point
col** pour l'étude asymptotique de $g^{z_0}(z)$

Plan d'attaque

Equation fonctionnelle à noyau(x)
liant des transformées de Laplace

Etude des **branches** du/des noyau(x)

Prolongement des trans-
formées de Laplace

Inversion de Laplace et **méthode du point
col** pour l'étude asymptotique de $g^{z_0}(z)$

Identification des **fonctions har-
moniques** et de la **frontière de Martin**

II. Equation fonctionnelle

Equation fonctionnelle - exemple du brownien réfléchi

Semi-martingale \rightarrow formule d'Ito à $dZ_t = \sqrt{\Sigma}dW_t + \mu dt + R_1 dL_t^1 + R_2 dL_t^2$:

$$0 = e^{z_0 \cdot (x,y)} + \gamma(x,y)\varphi^{z_0}(x,y) + \gamma_1(x,y)\varphi_1^{z_0}(y) + \gamma_2(x,y)\varphi_2^{z_0}(x)$$

lorsque $x < 0, y < 0$, où

$$\begin{cases} \varphi^{z_0}(x,y) = \int_{(0,+\infty)^2} g^{z_0}(u,v)e^{-xu-yv} dudv, \\ \varphi_1^{z_0}(y) = \int_{(0,+\infty)} g^{z_0}(0,v)e^{-yv} dv, \\ \varphi_2^{z_0}(x) = \int_{(0,+\infty)} g^{z_0}(u,0)e^{-xu} du. \end{cases}$$

Equation fonctionnelle - exemple du brownien réfléchi

Semi-martingale \rightarrow formule d'Ito à $dZ_t = \sqrt{\Sigma}dW_t + \mu dt + R_1 dL_t^1 + R_2 dL_t^2$:

$$0 = e^{z_0 \cdot (x,y)} + \gamma(x,y)\varphi^{z_0}(x,y) + \gamma_1(x,y)\varphi_1^{z_0}(y) + \gamma_2(x,y)\varphi_2^{z_0}(x)$$

lorsque $x < 0, y < 0$, où

$$\begin{cases} \varphi^{z_0}(x,y) = \int_{(0,+\infty)^2} g^{z_0}(u,v)e^{-xu-yv} dudv, \\ \varphi_1^{z_0}(y) = \int_{(0,+\infty)} g^{z_0}(0,v)e^{-yv} dv, \\ \varphi_2^{z_0}(x) = \int_{(0,+\infty)} g^{z_0}(u,0)e^{-xu} du. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \gamma(x,y) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}x^2 + 2\sigma_{12}xy + \sigma_{22}y^2) + \mu_1x + \mu_2y \\ \gamma_1(x,y) = R^1 \cdot (x,y) = r_{11}x + r_{21}y \\ \gamma_2(x,y) = R^2 \cdot (x,y) = r_{12}x + r_{22}y. \end{cases}$$

Equation fonctionnelle - exemple du brownien réfléchi

Semi-martingale \rightarrow formule d'Ito à $dZ_t = \sqrt{\Sigma}dW_t + \mu dt + R_1 dL_t^1 + R_2 dL_t^2$:

$$0 = e^{z_0 \cdot (x,y)} + \gamma(x,y)\varphi^{z_0}(x,y) + \gamma_1(x,y)\varphi_1^{z_0}(y) + \gamma_2(x,y)\varphi_2^{z_0}(x)$$

lorsque $x < 0, y < 0$, où

$$\begin{cases} \varphi^{z_0}(x,y) = \int_{(0,+\infty)^2} g^{z_0}(u,v)e^{-xu-yv} dudv, \\ \varphi_1^{z_0}(y) = \int_{(0,+\infty)} g^{z_0}(0,v)e^{-yv} dv, \\ \varphi_2^{z_0}(x) = \int_{(0,+\infty)} g^{z_0}(u,0)e^{-xu} du. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \gamma(x,y) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}x^2 + 2\sigma_{12}xy + \sigma_{22}y^2) + \mu_1x + \mu_2y \\ \gamma_1(x,y) = R^1 \cdot (x,y) = r_{11}x + r_{21}y \\ \gamma_2(x,y) = R^2 \cdot (x,y) = r_{12}x + r_{22}y. \end{cases}$$

Equation fonctionnelle - exemple du brownien réfléchi

Semi-martingale \rightarrow formule d'Ito à $dZ_t = \sqrt{\Sigma}dW_t + \mu dt + R_1 dL_t^1 + R_2 dL_t^2$:

$$0 = e^{z_0 \cdot (x,y)} + \cancel{\gamma(x,y)\varphi^{z_0}(x,y)} + \gamma_1(x,y)\varphi_1^{z_0}(y) + \gamma_2(x,y)\varphi_2^{z_0}(x)$$

lorsque $x < 0, y < 0$, où

$$\begin{cases} \varphi^{z_0}(x,y) = \int_{(0,+\infty)^2} g^{z_0}(u,v)e^{-xu-yv} dudv, \\ \varphi_1^{z_0}(y) = \int_{(0,+\infty)} g^{z_0}(0,v)e^{-yv} dv, \\ \varphi_2^{z_0}(x) = \int_{(0,+\infty)} g^{z_0}(u,0)e^{-xu} du. \end{cases}$$

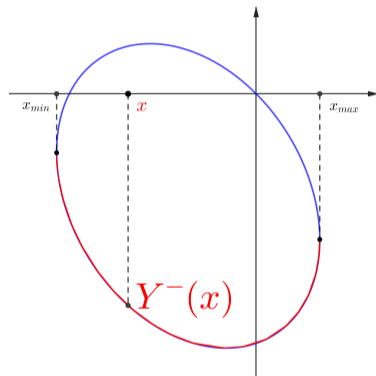


$$\begin{cases} \boxed{\gamma(x,y) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}x^2 + 2\sigma_{12}xy + \sigma_{22}y^2) + \mu_1x + \mu_2y = \mathbf{0} \text{ pour } x,y \text{ bien choisis}} \\ \gamma_1(x,y) = \frac{\sigma_{11}}{2}R^1 \cdot (x,y) = \frac{\sigma_{11}}{2}(x + r_1y) \\ \gamma_2(x,y) = \frac{\sigma_{22}}{2}R^2 \cdot (x,y) = \frac{\sigma_{11}}{2}(r_2x + y). \end{cases}$$

Branches et prolongement méromorphe

Equations polynomiales : branches complexes
 X^\pm, Y^\pm telles que

$$\gamma(x, Y^\pm(x)) = \gamma(X^\pm(y), y) = 0.$$



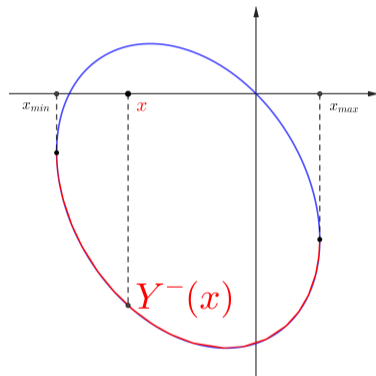
Ellipse $\gamma(x, y) = 0$ et branche $Y^-(x)$.

Branches et prolongement méromorphe

Equations polynomiales : branches complexes
 X^\pm, Y^\pm telles que

$$\gamma(x, Y^\pm(x)) = \gamma(X^\pm(y), y) = 0.$$

Injection dans l'équation fonctionnelle :



Ellipse $\gamma(x, y) = 0$ et branche $Y^-(x)$.

Branches et prolongement méromorphe

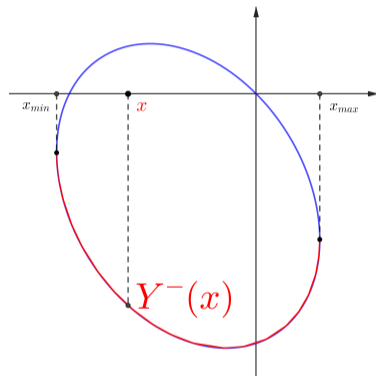
Equations polynomiales : branches complexes
 X^\pm, Y^\pm telles que

$$\gamma(x, Y^\pm(x)) = \gamma(X^\pm(y), y) = 0.$$

Injection dans l'équation fonctionnelle :

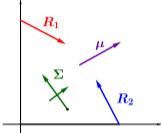
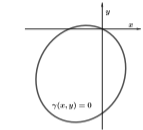
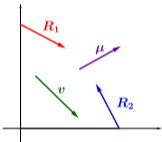
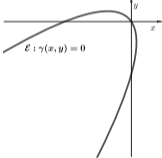
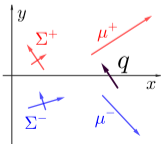
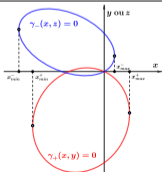
$$0 = e^{z_0 \cdot (x, Y^-(x))} + \gamma_1(x, Y^-(x)) \varphi_1^{z_0}(Y^-(x))$$

$$+ \gamma_2(x, Y^-(x)) \underbrace{\varphi_2^{z_0}(x)}_{\text{se prolonge}}$$



Ellipse $\gamma(x, y) = 0$ et branche $Y^-(x)$.

Equations fonctionnelles

| Processus | Equation fonctionnelle | Paramètres | Noyau(x) $\gamma = 0$ |
|-----------------------------------|---|---|---|
| Brownien réfléchi non dégénéré | $0 = e^{z_0 \cdot (x,y)} + \gamma(x,y)\varphi^{z_0}(x,y) + \gamma_1(x,y)\varphi_1^{z_0}(y) + \gamma_2(x,y)\varphi_2^{z_0}(x)$ |  |  |
| Brownien réfléchi dégénéré | $0 = e^{z_0 \cdot (x,y)} + \gamma(x,y)\varphi^{z_0}(x,y) + \gamma_1(x,y)\varphi_1^{z_0}(y) + \gamma_2(x,y)\varphi_2^{z_0}(x)$ |  |  |
| Diffusion avec barrière perméable | $0 = e^{x a_0 + y b_0 \mathbb{1}_{b_0 > 0} + z b_0 \mathbb{1}_{b_0 < 0}} + \gamma_-(x,z)\varphi_-^{z_0}(x,z) + \gamma_+(x,y)\varphi_+^{z_0}(x,y) + \gamma(x,y,z)\varphi^{z_0}(x)$ |  |  |

III. Asymptotique des fonctions de Green et frontière de Martin

Plan

I. Processus et questions principales

- A. Diffusions planaires avec comportements frontière
- B. Fonctions harmoniques et fonctions de Green

II. Equation fonctionnelle

III. Asymptotique des fonctions de Green et frontière de Martin

- A. Méthode du point col
- B. Résultats d'asymptotique

IV. Méthode par compensation

Inversion de Laplace

Lemme

Si φ^{z_0} désigne la transformée de Laplace de $g^{z_0}(\cdot)$, alors

$$g^{z_0}(a, b) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \varphi^{z_0}(x, y) e^{-ax-by} dx dy.$$

Inversion de Laplace

Lemme

Si φ^{z_0} désigne la transformée de Laplace de $g^{z_0}(\cdot)$, alors

$$g^{z_0}(a, b) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \underbrace{\varphi^{z_0}(x, y)}_{= \frac{\gamma_1(x,y)\varphi_1(y) + \gamma_2(x,y)\varphi_2(x) + e^{z_0 \cdot (x,y)}}{\gamma(x,y)}} e^{-ax-by} dx dy.$$

Par le théorème des résidus :

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} [\text{méromorphe}] e^{-r[\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)Y^+(x)]} dx$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \dots dy.$$

Inversion de Laplace

Lemme

Si φ^{z_0} désigne la transformée de Laplace de $g^{z_0}(\cdot)$, alors

$$g^{z_0}(a, b) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \underbrace{\varphi^{z_0}(x, y)}_{= \frac{\gamma_1(x,y)\varphi_1(y) + \gamma_2(x,y)\varphi_2(x) + e^{z_0 \cdot (x,y)}}{\gamma(x,y)}} e^{-ax-by} dx dy.$$

Par le théorème des résidus :

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} [\text{méromorphe}] e^{-r} [\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)Y^+(x)] dx$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \dots dy.$$

Méthode de Laplace

Théorème (de Laplace)

Si $u, v : [a, b] \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$, et $t_0 \in [a, b]$ sont tels que v est maximale en $t_0 \in (a, b)$, $v''(t_0) < 0$ et $u(t_0) \neq 0$, alors

$$\int_a^b u(t)e^{rv(t)} dt \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} u(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|v''(t_0)|}} \frac{e^{rv(t_0)}}{\sqrt{r}}.$$

Méthode de Laplace

Théorème (de Laplace)

Si $u, v : [a, b] \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$, et $t_0 \in [a, b]$ sont tels que v est maximale en $t_0 \in (a, b)$, $v''(t_0) < 0$ et $u(t_0) \neq 0$, alors

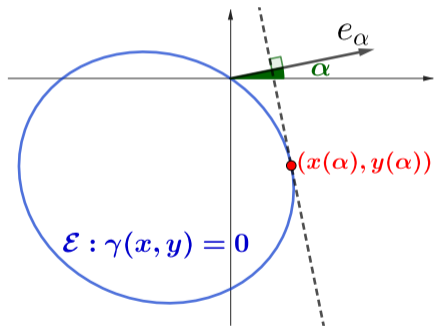
$$\int_a^b u(t)e^{rv(t)} dt \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} u(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|v''(t_0)|}} \frac{e^{rv(t_0)}}{\sqrt{r}}.$$

Preuve : développement de Taylor

$$\int_a^b u(t)e^{rv(t)} dt \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} u(t_0)e^{rv(t_0)} \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} e^{rv''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2}} dt.$$

Méthode de point col

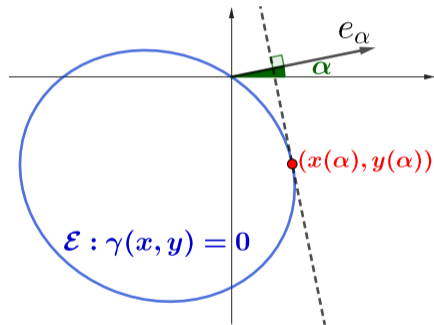
$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{-\epsilon - i\infty}^{-\epsilon + i\infty} [\text{méromorphe}] e^{-r[\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)\mathbf{Y}^+(x)]} dx.$$



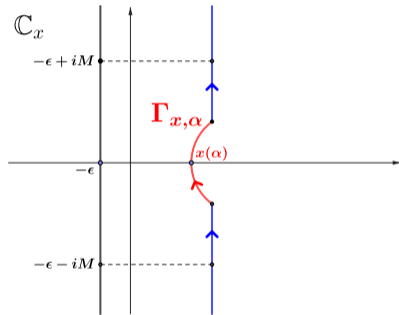
(a) Point col $(x(\alpha), y(\alpha))$.

Méthode de point col

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{-\epsilon - i\infty}^{-\epsilon + i\infty} [\text{méromorphe}] e^{-r[\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)Y^+(x)]} dx.$$



(a) Point col $(x(\alpha), y(\alpha))$.

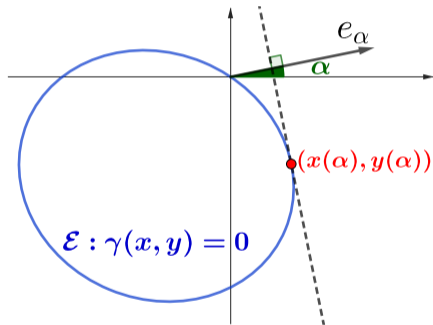


(b) Changement de chemin d'intégration.

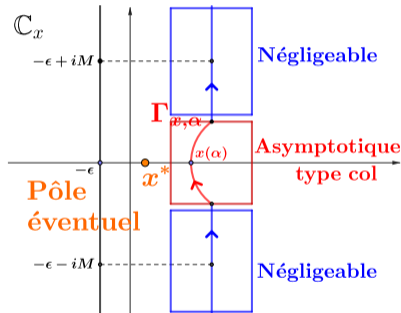
Passage par $\Gamma_{x,\alpha}$ chemin de **plus grande pente** (lemme de Morse à paramètre).

Méthode de point col

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{-\epsilon - i\infty}^{-\epsilon + i\infty} [\text{méromorphe}] e^{-r[\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)Y^+(x)]} dx.$$



(a) Point col $(x(\alpha), y(\alpha))$.



(b) Changement de chemin d'intégration.

Passage par $\Gamma_{x,\alpha}$ chemin de **plus grande pente** (lemme de Morse à paramètre).

Plan

I. Processus et questions principales

- A. Diffusions planaires avec comportements frontière
- B. Fonctions harmoniques et fonctions de Green

II. Equation fonctionnelle

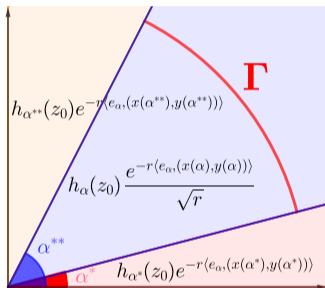
III. Asymptotique des fonctions de Green et frontière de Martin

- A. Méthode du point col
- B. Résultats d'asymptotique

IV. Méthode par compensation

Frontière de Martin pour les Browniens réfléchis

Il existe $0 \leq \alpha^* < \alpha^{**} \leq \pi/2$ (explicites) tels que :



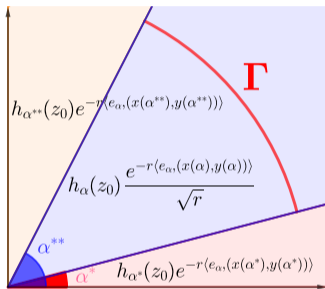
(a) Asymptotique de $g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$

Théorème (Franceschi, Kourkova, Petit, 2024)

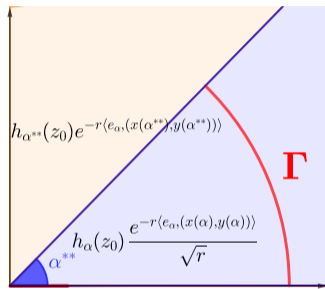
La frontière de Martin vaut $\Gamma = [\alpha^*, \alpha^{**}]$.

Frontière de Martin pour les Browniens réfléchis

Il existe $0 \leq \alpha^* < \alpha^{**} \leq \pi/2$ (explicites) tels que :



(a) Asymptotique de $g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$



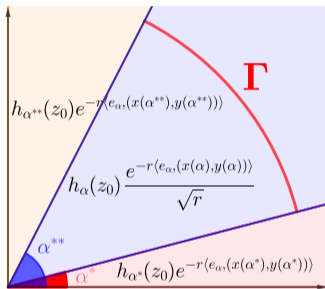
(b) Cas $\alpha^* = 0, \alpha^{**} < \pi/2$

Théorème (Franceschi, Kourkova, Petit, 2024)

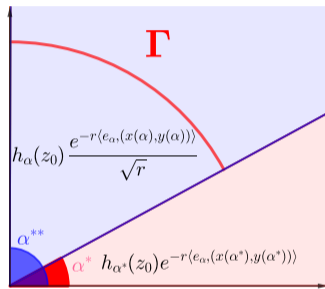
La frontière de Martin vaut $\Gamma = [\alpha^*, \alpha^{**}]$.

Frontière de Martin pour les Browniens réfléchis

Il existe $0 \leq \alpha^* < \alpha^{**} \leq \pi/2$ (explicites) tels que :



(a) Asymptotique de $g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$



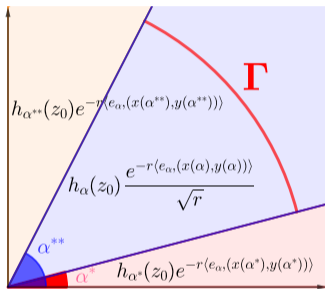
(b) Cas $\alpha^* > 0, \alpha^{**} = \pi/2$

Théorème (Franceschi, Kourkova, Petit, 2024)

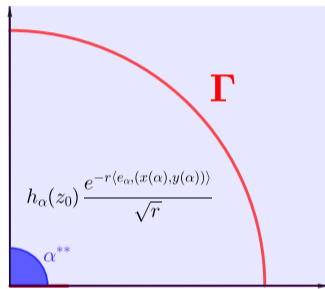
La frontière de Martin vaut $\Gamma = [\alpha^*, \alpha^{**}]$.

Frontière de Martin pour les Browniens réfléchis

Il existe $0 \leq \alpha^* < \alpha^{**} \leq \pi/2$ (explicites) tels que :



(a) Asymptotique de $g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$

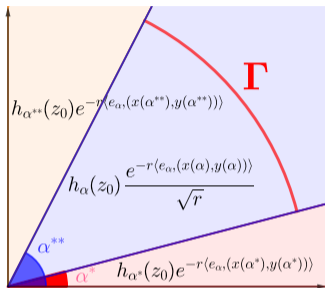


(b) Cas $\alpha^* = 0, \alpha^{**} = \pi/2$

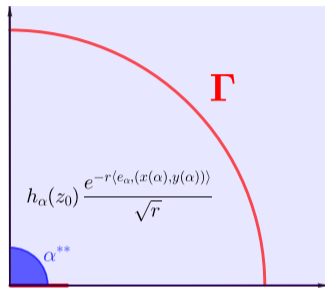
Théorème (Franceschi, Kourkova, Petit, 2024)

La frontière de Martin vaut $\Gamma = [\alpha^*, \alpha^{**}]$.

Frontière de Martin pour les Browniens réfléchis



(a) Asymptotique de $g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$



(b) Cas $\alpha^* = 0, \alpha^{**} = \pi/2$

Théorème (Franceschi, Kourkova, Petit, 2024)

La frontière de Martin vaut $\Gamma = [\alpha^*, \alpha^{**}]$.

Remarque

Dans les directions α^* et α^{**} : “compétition” entre les termes de pole et de col.

Recapitulatif, et direction $\alpha \rightarrow 0$

Lorsque $\alpha_0 \in (0, \alpha^*) \cup (\alpha^*, \alpha^{**}) \cup (\alpha^{**}, \pi/2)$, on a

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \underset{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \alpha \rightarrow \alpha_0}}{\sim} h_{\alpha^\varepsilon}(z_0) r^\kappa e^{-r \langle e_\alpha, (x(\alpha^\varepsilon), y(\alpha^\varepsilon)) \rangle}$$

avec $\kappa \in \left\{0, \frac{-1}{2}\right\}$ et $\alpha^\varepsilon = \alpha, \alpha^*$ ou α^{**} .

Recapitulatif, et direction $\alpha \rightarrow 0$

Lorsque $\alpha_0 \in (0, \alpha^*) \cup (\alpha^*, \alpha^{**}) \cup (\alpha^{**}, \pi/2)$, on a

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \underset{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \alpha \rightarrow \alpha_0}}{\sim} h_{\alpha^\varepsilon}(z_0) r^\kappa e^{-r \langle e_\alpha, (x(\alpha^\varepsilon), y(\alpha^\varepsilon)) \rangle}$$

avec $\kappa \in \left\{0, \frac{-1}{2}\right\}$ et $\alpha^\varepsilon = \alpha, \alpha^*$ ou α^{**} .

► Si $\alpha^* = 0$,

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \underset{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \alpha \rightarrow 0}}{\sim} h_0(z_0) \frac{e^{-r \langle e_\alpha, (x(\alpha), y(\alpha)) \rangle}}{\sqrt{r}} \left(\alpha + \frac{c}{r} \right)$$

► Si $\alpha^* > 0$,

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \underset{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \alpha \rightarrow 0}}{\sim} h_{\alpha^*}(z_0) e^{-r \langle e_\alpha, (x(\alpha^*), y(\alpha^*)) \rangle}$$

Asymptotiques lorsque $\alpha \rightarrow \alpha^*$ si $\alpha^* > 0$

- ▶ Si $r(\alpha - \alpha^*)^2 \rightarrow c \geq 0$, il existe $A > 0$ tel que :

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \underset{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \alpha \rightarrow \alpha^*}}{\sim} \frac{1}{2}(1 \pm \Phi(\sqrt{c}A))h_{\alpha^*}(z_0)e^{-r\langle e_\alpha, (x(\alpha^*), y(\alpha^*)) \rangle}.$$

où $\Phi(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$.

- ▶ Si $r(\alpha - \alpha^*)^2 \rightarrow +\infty$, alors :

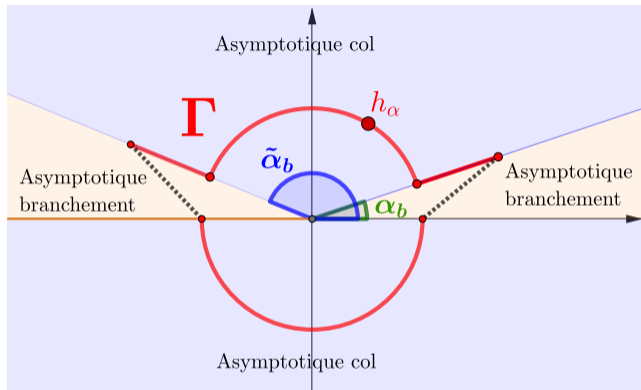
- ▶ Si $\alpha < \alpha^*$,

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \underset{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \alpha \rightarrow \alpha^*}}{\sim} h_{\alpha^*}(z_0)e^{-r\langle e_\alpha, (x(\alpha^*), y(\alpha^*)) \rangle}.$$

- ▶ Si $\alpha > \alpha^*$,

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \underset{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \alpha \rightarrow \alpha^*}}{\sim} h_{\alpha^*}(z_0) \frac{c'}{\alpha - \alpha^*} e^{-r\langle e_\alpha, (x(\alpha), y(\alpha)) \rangle}.$$

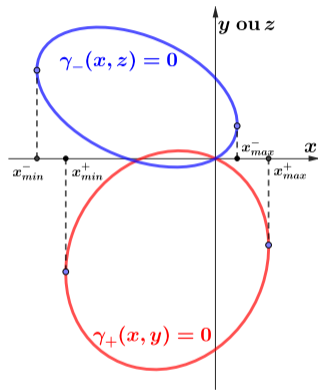
Frontière de Martin pour la diffusion avec barrière perméable



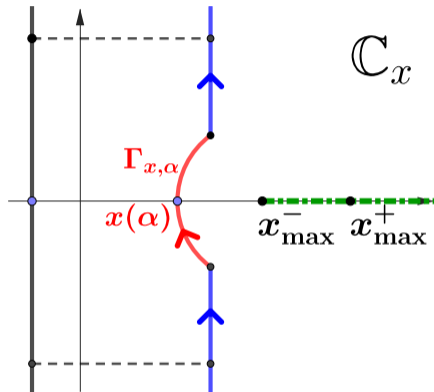
Asymptotique de type branchement :

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha) r \sin(\alpha)) \sim h_0(z_0) \frac{e^{-r \langle e_\alpha, (x(\alpha_b), y(\alpha_b)) \rangle}}{r^{3/2}}.$$

Changement de chemin pour la barrière perméable

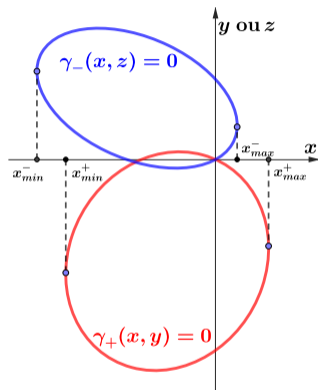


(a) Les deux ellipses d'équation $\gamma_+(x, y) = 0$ et $\gamma_-(x, z) = 0$.

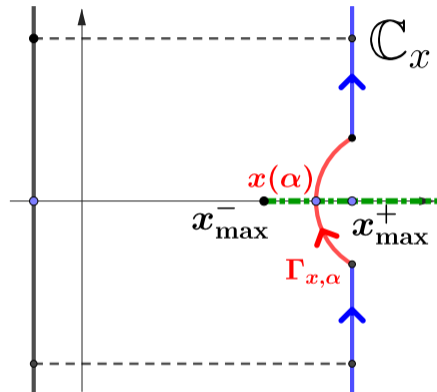


(b) Changement de chemin, lorsque $x(\alpha) < x_{max}^-$ et $x(\alpha) < x_{max}^+$.

Changement de chemin pour la barrière perméable

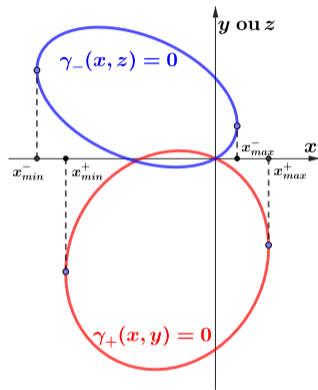


(a) Les deux ellipses d'équation $\gamma_+(x, y) = 0$ et $\gamma_-(x, z) = 0$.

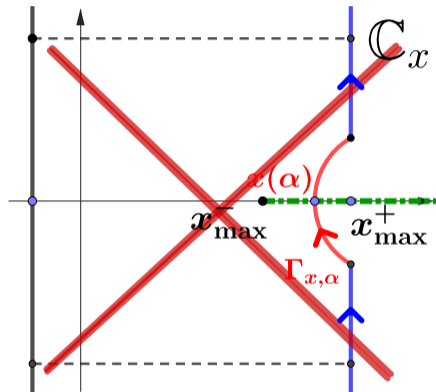


(b) Tentative lorsque $x(\alpha) > x_{max}^-$ et $x(\alpha) < x_{max}^+$.

Changement de chemin pour la barrière perméable

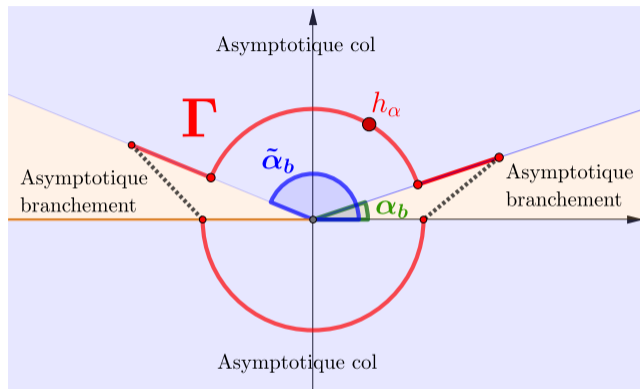


(a) Les deux ellipses d'équation $\gamma_+(x, y) = 0$ et $\gamma_-(x, z) = 0$.



(b) Tentative lorsque $x(\alpha) > x_{max}^-$ et $x(\alpha) < x_{max}^+$.

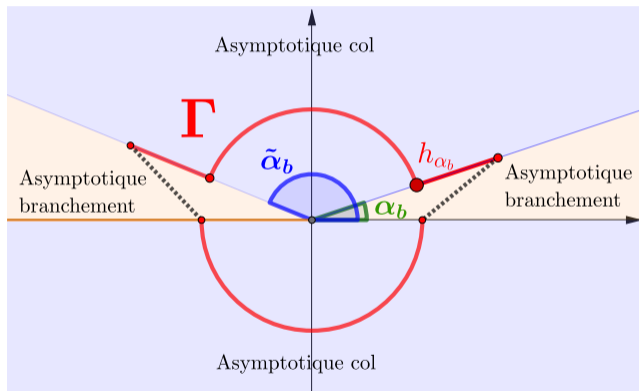
Frontière de Martin pour la diffusion avec barrière perméable



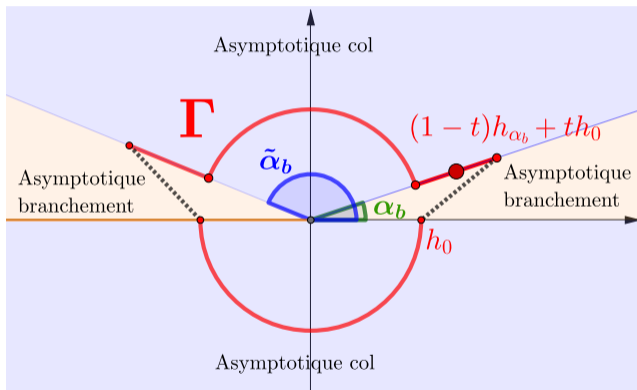
Asymptotique de type branchement :

$$g^{z_0}(r \cos(\alpha) r \sin(\alpha)) \sim h_0(z_0) \frac{e^{-r \langle e_\alpha, (x(\alpha_b), y(\alpha_b)) \rangle}}{r^{3/2}}.$$

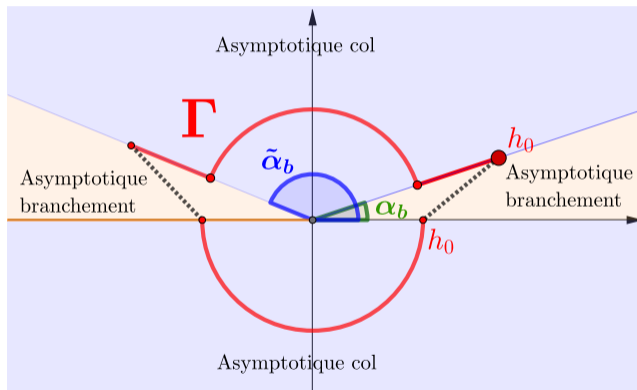
Frontière de Martin pour la diffusion avec barrière perméable



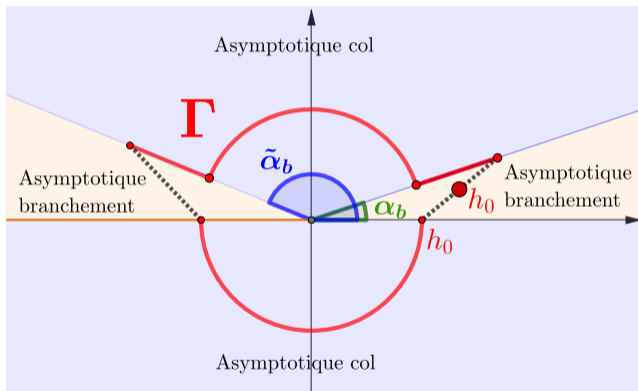
Frontière de Martin pour la diffusion avec barrière perméable



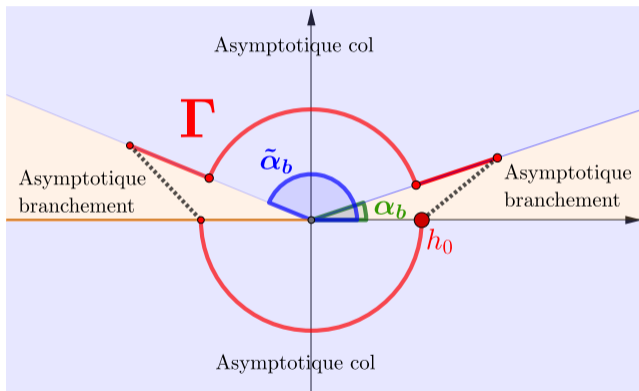
Frontière de Martin pour la diffusion avec barrière perméable



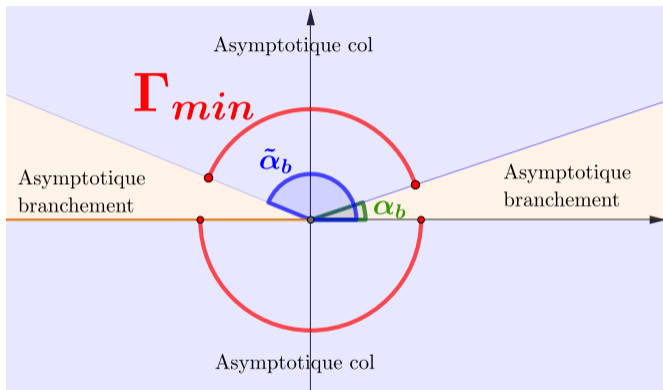
Frontière de Martin pour la diffusion avec barrière perméable



Frontière de Martin pour la diffusion avec barrière perméable



Frontière de Martin pour la diffusion avec barrière perméable



Théorème (Franceschi, Kourkova, Petit, 2025)

La frontière de Martin *minimale* vaut $\Gamma_{min} = [\alpha_b, \tilde{\alpha}_b] \cup [\pi, 2\pi]$.

IV. Méthode par compensation

Fonctions harmoniques

| Processus | Fonctions harmoniques | Formules | |
|--------------------|--|---------------------|--|
| Brownien réfléchi | $h_\alpha(z_0) = \gamma_1(x(\alpha), y(\alpha)) \boxed{\varphi_1^{z_0}(y(\alpha))} + \gamma_2(x(\alpha), y(\alpha)) \boxed{\varphi_2^{z_0}(x(\alpha))} + e^{(x(\alpha), y(\alpha)) \cdot z_0}$ | Non dégénéré | Formules intégrales (Riemann-Hilbert-Carleman) |
| | | Dégénéré | Méthode par compensation |
| Barrière perméable | $h_\alpha =$ somme d'exponentielles | Formules explicites | |

EDP des fonctions harmoniques

Rappel : une fonction h est harmonique pour le **Brownien dégénéré** si

$$\begin{cases} (\mathbf{H}_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_V^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, & z \in (0, +\infty)^2 \\ (\mathbf{H}_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, & y \geq 0 \\ (\mathbf{H}_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

EDP des fonctions harmoniques

Rappel : une fonction h est harmonique pour le **Brownien dégénéré** si

$$\begin{cases} (\mathbf{H}_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, & z \in (0, +\infty)^2 \\ (\mathbf{H}_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, & y \geq 0 \\ (\mathbf{H}_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Remarque

On a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) e^{ax+by} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}(v_1 a + v_2 b)^2 + \mu_1 a + \mu_2 b\right)}_{=:\gamma(a,b)} e^{ax+by}. \end{aligned}$$

EDP des fonctions harmoniques

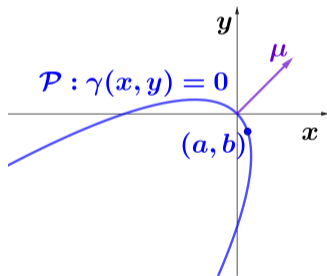
Rappel : une fonction h est harmonique pour le **Brownien dégénéré** si

$$\begin{cases} (\mathbf{H}_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, & z \in (0, +\infty)^2 \\ (\mathbf{H}_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, & y \geq 0 \\ (\mathbf{H}_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Remarque

On a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) e^{ax+by} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}(v_1 a + v_2 b)^2 + \mu_1 a + \mu_2 b\right)}_{=:\gamma(a,b)} e^{ax+by}. \end{aligned}$$



Parabole $\gamma(x, y) = 0$

EDP des fonctions harmoniques

Rappel : une fonction h est harmonique pour le **Brownien dégénéré** si

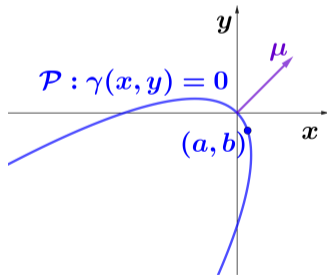
$$\begin{cases} (\mathbf{H}_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, & z \in (0, +\infty)^2 \\ (\mathbf{H}_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, & y \geq 0 \\ (\mathbf{H}_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Remarque

On a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) e^{ax+by} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}(v_1 a + v_2 b)^2 + \mu_1 a + \mu_2 b\right)}_{=: \gamma(a,b)} e^{ax+by}. \end{aligned}$$

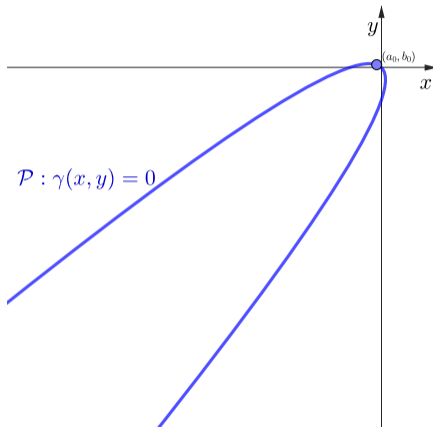
Si $(a, b) \in \mathcal{P}$, $e^{ax+by} \in (\mathbf{H}_0)$



Parabole $\gamma(x, y) = 0$

Méthode par compensation

$$\begin{cases} (\mathbf{H}_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, & z \in (0, +\infty)^2 \\ (\mathbf{H}_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, & y \geq 0 \\ (\mathbf{H}_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$



$$\underbrace{e^{a_0x+b_0y} + c_1 e^{a_1x+b_1y}}_{\in (H_2)}$$

Méthode par compensation

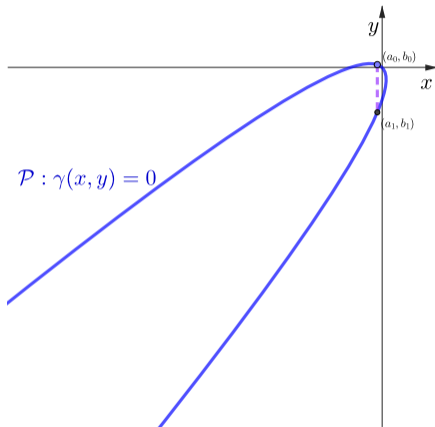
$$\begin{cases} (\mathbf{H}_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, \quad z \in (0, +\infty)^2 \\ (\mathbf{H}_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, \quad y \geq 0 \\ (\mathbf{H}_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

On a :

$$e^{a_0x+b_0y} + c_1 e^{a_1x+b_1y} \in (\mathbf{H}_2)$$

$$\iff (r_{12}a_0 + r_{22}b_0)e^{a_0x} + c_1(r_{12}a_1 + b_1r_{22})e^{a_1x} = 0$$

$$\iff a_0 = a_1 \text{ et } c_1 = -\frac{r_{12}a_0 + r_{22}b_0}{r_{12}a_1 + b_1r_{22}}$$



$$\underbrace{e^{a_0x+b_0y} + c_1 e^{a_1x+b_1y}}_{\in (\mathbf{H}_2)}$$

Méthode par compensation

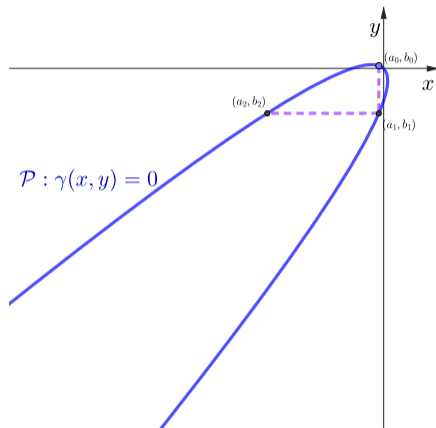
$$\begin{cases} (H_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, \quad z \in (0, +\infty)^2 \\ (H_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, \quad y \geq 0 \\ (H_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

On a :

$$c_1 e^{a_1 x + b_1 y} + c_2 e^{a_2 x + b_2 y} \in (H_1)$$

$$\iff (r_{11} a_0 + r_{21} b_0) e^{b_1 y} + c_1 (r_{11} a_2 + b_1 r_{21}) e^{b_2 y} = 0$$

$$\iff b_1 = b_2 \text{ et } c_2 = -\frac{r_{11} a_1 + r_{21} b_1}{r_{11} a_2 + b_2 r_{21}} c_1$$



$$\underbrace{e^{a_0 x + b_0 y}}_{\in (H_2)} + \underbrace{c_1 e^{a_1 x + b_1 y} + c_2 e^{a_2 x + b_2 y}}_{\in (H_1)} .$$

Méthode par compensation

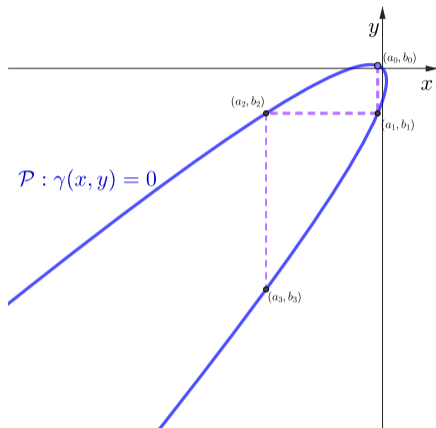
$$\begin{cases} (\mathbf{H}_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, \quad z \in (0, +\infty)^2 \\ (\mathbf{H}_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, \quad y \geq 0 \\ (\mathbf{H}_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

On a :

$$c_1 e^{a_1 x + b_1 y} + c_2 e^{a_2 x + b_2 y} \in (H_1)$$

$$\iff (r_{11} a_0 + r_{21} b_0) e^{b_1 y} + c_1 (r_{11} a_2 + b_1 r_{21}) e^{b_2 y} = 0$$

$$\iff b_1 = b_2 \text{ et } c_2 = -\frac{r_{11} a_1 + r_{21} b_1}{r_{11} a_2 + b_2 r_{21}} c_1$$



$$\underbrace{e^{a_0 x + b_0 y}}_{\in (H_2)} + \underbrace{c_1 e^{a_1 x + b_1 y} + c_2 e^{a_2 x + b_2 y}}_{\in (H_1)} + \underbrace{c_3 e^{a_3 x + b_3 y}}_{\in (H_2)}$$

Méthode par compensation

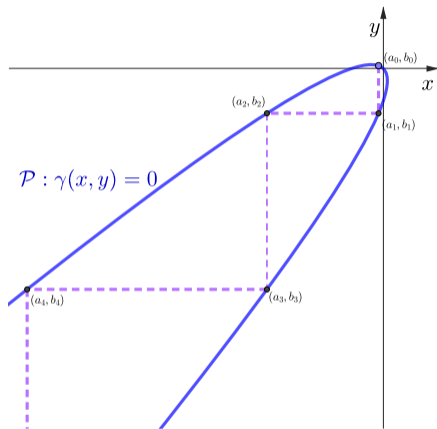
$$\begin{cases} (H_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, \quad z \in (0, +\infty)^2 \\ (H_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, \quad y \geq 0 \\ (H_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

On a :

$$c_1 e^{a_1 x + b_1 y} + c_2 e^{a_2 x + b_2 y} \in (H_1)$$

$$\iff (r_{11} a_0 + r_{21} b_0) e^{b_1 y} + c_1 (r_{11} a_2 + b_1 r_{21}) e^{b_2 y} = 0$$

$$\iff b_1 = b_2 \text{ et } c_2 = -\frac{r_{11} a_1 + r_{21} b_1}{r_{11} a_2 + b_2 r_{21}} c_1$$



$$\underbrace{e^{a_0 x + b_0 y}}_{\in(H_2)} + \underbrace{c_1 e^{a_1 x + b_1 y}}_{\in(H_1)} + \underbrace{c_2 e^{a_2 x + b_2 y}}_{\in(H_2)} + c_3 e^{a_3 x + b_3 y} + \dots$$

Méthode par compensation

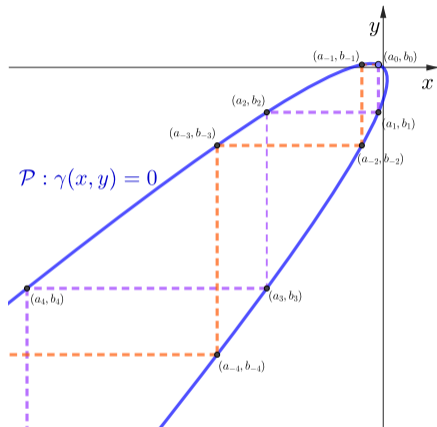
$$\begin{cases} (H_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, \quad z \in (0, +\infty)^2 \\ (H_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, \quad y \geq 0 \\ (H_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

On a :

$$c_1 e^{a_1 x + b_1 y} + c_2 e^{a_2 x + b_2 y} \in (H_1)$$

$$\iff (r_{11} a_0 + r_{21} b_0) e^{b_1 y} + c_1 (r_{11} a_2 + b_1 r_{21}) e^{b_2 y} = 0$$

$$\iff b_1 = b_2 \text{ et } c_2 = -\frac{r_{11} a_1 + r_{21} b_1}{r_{11} a_2 + b_2 r_{21}} c_1$$



$$\dots + \underbrace{c_{-2} e^{a_{-2} x + b_{-2} y} + c_{-1} e^{a_{-1} x + b_{-1} y}}_{\in (H_2)} + \underbrace{e^{a_0 x + b_0 y} + c_1 e^{a_1 x + b_1 y} + c_2 e^{a_2 x + b_2 y}}_{\in (H_1)} + \dots$$

Méthode par compensation

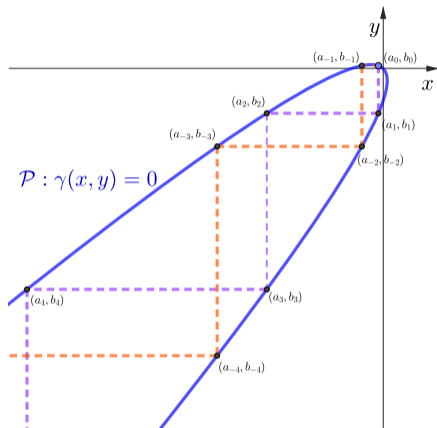
$$\begin{cases} (\mathbf{H}_0) & \left(\frac{1}{2}\partial_v^2 + \mu \cdot \nabla\right) h(z) = 0, \quad z \in (0, +\infty)^2 \\ (\mathbf{H}_1) & (R_1 \cdot \nabla) h(0, y) = 0, \quad y \geq 0 \\ (\mathbf{H}_2) & (R_2 \cdot \nabla) h(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

On a :

$$c_1 e^{a_1 x + b_1 y} + c_2 e^{a_2 x + b_2 y} \in (H_1)$$

$$\iff (r_{11} a_0 + r_{21} b_0) e^{b_1 y} + c_1 (r_{11} a_2 + b_1 r_{21}) e^{b_2 y} = 0$$

$$\iff b_1 = b_2 \text{ et } c_2 = -\frac{r_{11} a_1 + r_{21} b_1}{r_{11} a_2 + b_2 r_{21}} c_1$$



Théorème (Petit, 2025)

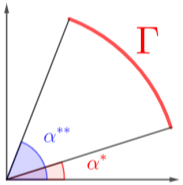
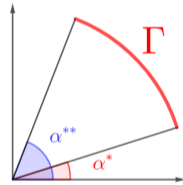
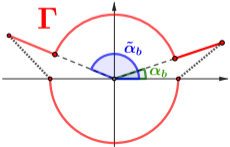
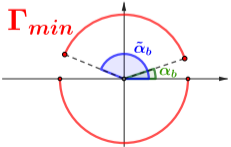
$$h_\alpha(x, y) = \underbrace{\dots + c_{-1} e^{a_{-1}x(\alpha) + b_{-1}y(\alpha)}}_{= \gamma_2(x(\alpha), y(\alpha)) \varphi_2(x(\alpha))} + e^{a_0 x(\alpha) + b_0 y(\alpha)} + \underbrace{c_1 e^{a_1 x(\alpha) + b_1 y(\alpha)} + \dots}_{= \gamma_1(x(\alpha), y(\alpha)) \varphi_1(y(\alpha))}$$

Bilan

- ▶ Asymptotique exacte des fonctions de Green dans toutes les directions

Bilan

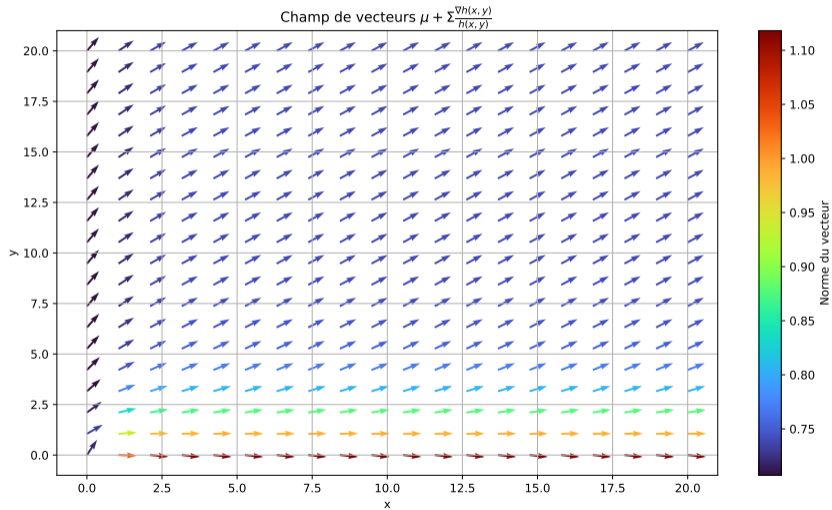
- ▶ Asymptotique exacte des fonctions de Green dans toutes les directions

| Processus | Frontière de Martin | Frontière de Martin minimale | Fonctions harmoniques positives | |
|---------------------|---|--|---------------------------------|---|
| Browniens réfléchis |  |  | Non dégénéré | Implicites (transformées de Laplace) |
| | | | Dégénéré | Somme infinie (alternée) |
| Barrière perméable |  |  | Somme de deux exponentielles | |

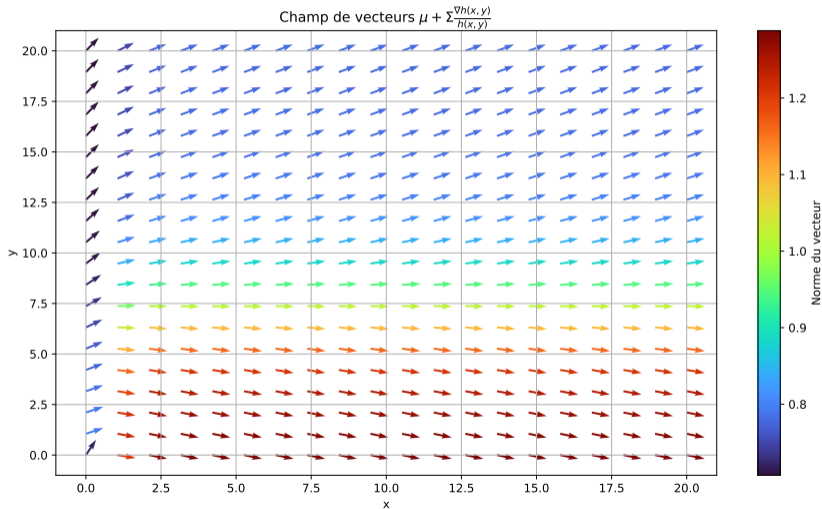
Merci pour votre attention !

Appendix

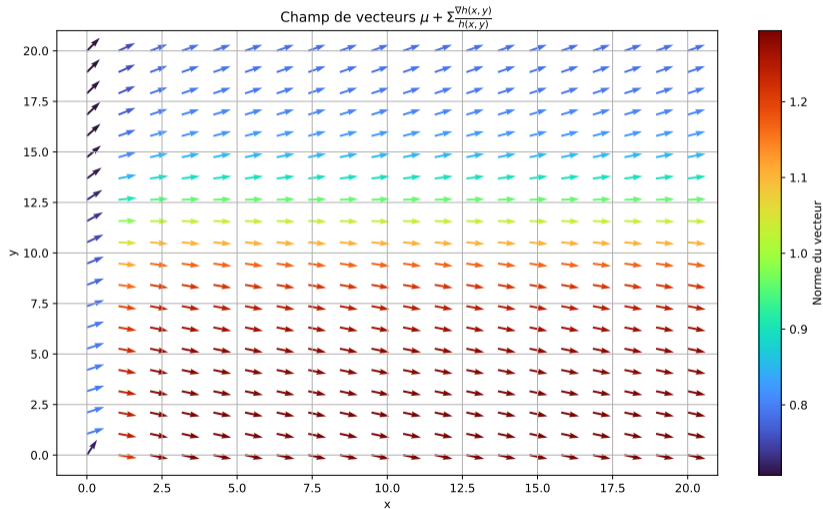
Drift après conditionnement, cas $\alpha \gg \alpha^*$



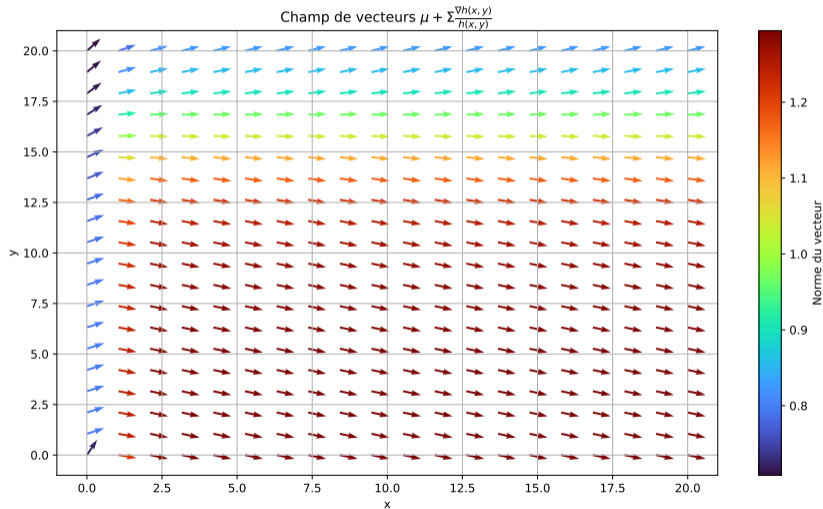
Drift après conditionnement, α se rapproche de α^*



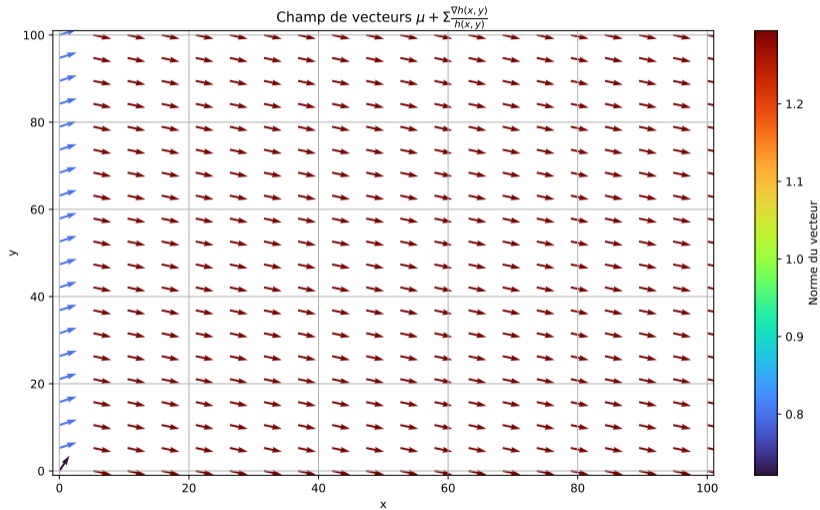
Drifts après conditionnement, α se rapproche de α^*



Drift après conditionnement, α se rapproche de α^*



Drift après conditionnement, cas $\alpha = \alpha^*$



Conditionnement

$$\mathbb{P}_x(X_t \in B | T_{C_n} < +\infty) = \frac{\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{X_t \in B} \mathbf{1}_{T_{C_n} < +\infty}]}{\mathbb{P}_x(T_{C_n} < +\infty)} = \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{X_t \in B} \frac{\mathbb{P}_{X_t}(T_{C_n} \circ \theta_t < +\infty)}{\mathbb{P}_x(T_{C_n} < +\infty)} \right].$$

Si l'espace d'état et le temps est discret, alors $G(x, y) = \mathbb{E}_x[\text{nombre de visites de } y]$, donc

$$G(x, y) = \mathbb{P}_x(T_y < +\infty)G(y, y)$$

par la propriété de Markov forte. Ainsi, si on se fixe x_0 dans l'espace d'états,

$$\frac{\mathbb{P}_x(T_y < +\infty)}{\mathbb{P}_{x_0}(T_y < +\infty)} = \frac{G(x, y)}{G(x_0, y)} := K(x, y).$$

Conditionnement

En approximant $\mathbb{P}_{X_t}(T_{C_n} \circ \theta_t < +\infty) \sim \mathbb{P}_{X_t}(T_{C_n} < +\infty)$, on obtient

$$\mathbb{P}_x(X_t \in B | T_{C_n} < +\infty) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{X_t \in B} \frac{\mathbb{P}_{X_t}(T_{C_n} < +\infty)}{\mathbb{P}_x(T_{C_n} < +\infty)} \right] \quad (1)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{X_t \in B} \frac{G(X_t, C_n)}{G(x_0, C_n)} \right] \quad (2)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{E}_x [\mathbf{1}_{X_t \in B} h(X_t) / h(x_0)] \quad (3)$$

$$= \mathbb{P}^h(X_t \in B) \quad (4)$$