

Asymptotique des fonctions de Green pour le mouvement Brownien réfléchi dans un cône.

Maxence Petit, encadré par Irina Kourkova et Sandro Franceschi.

- I. Qu'est-ce donc ? Conditions d'existence
 - A. Le SRBM (Semimartingale Reflected Brownian Motion)
 - B. Cas transient et objets en jeu

- II. Asymptotique des densités de Green
 - A. Le théorème
 - B. Preuve de l'asymptotique

- III. (Ouvert) Cas du Brownien réfléchi dégénéré ?

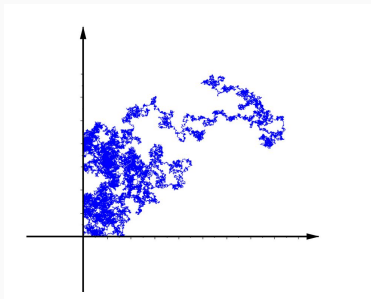
- I. Qu'est-ce donc ? Conditions d'existence
 - A. Le SRBM (Semimartingale Reflected Brownian Motion)
 - B. Cas transient et objets en jeu

- II. Asymptotique des densités de Green
 - A. Le théorème
 - B. Preuve de l'asymptotique

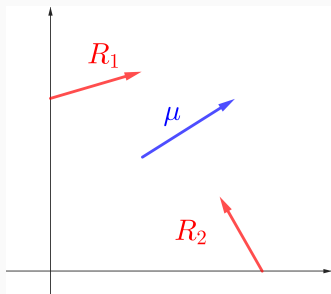
- III. (Ouvert) Cas du Brownien réfléchi dégénéré ?

C'est quoi ?

Mouvement Brownien réfléchi dans \mathbb{R}_+^2 : $Z_t = z_0 + B_t + \mu t + RL_t$



(a) Exemple de trajectoire



(b) Drift, vecteurs de réflexion

- $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien, $\mu \in \mathbb{R}^2$ le drift
- $R = (R_1, R_2)$ matrice de réflexion
- $(L_t)_{t \geq 0}$ temps local sur les axes $\text{supp}(dL^i) \subset \{t, Z_t^i = 0\}$.

Références et existence

- Survey : SRBM in the orthant - Williams (1995)
- Existence and uniqueness of semimartingale reflecting Brownian motions in an orthant - Taylor et Williams (1992)
- bien d'autres ...

Théorème : Existence et unicité faible

Existence unicité en loi en tout temps positif si et seulement si

$$r_{11} > 0, r_{22} > 0, \text{ et } [\det(R) > 0 \text{ ou } r_{21}, r_{12} > 0].$$

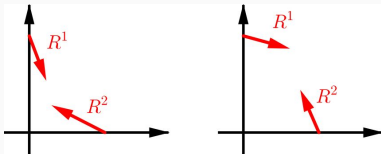


Figure 2 – Mal défini

Défini en tout temps

Brownien réfléchi dans un cône

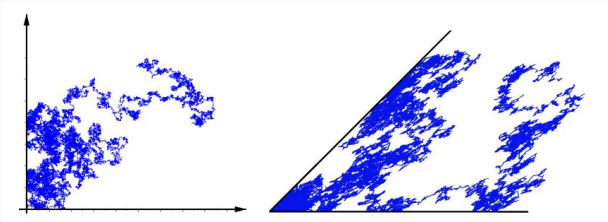
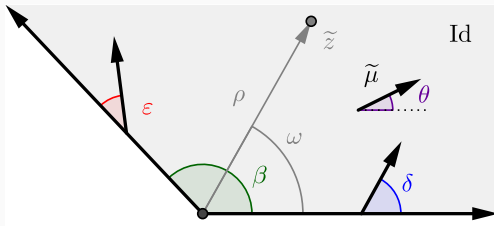


Figure 3 – Du quadrant au cône : transformation linéaire



- I. Qu'est-ce donc ? Conditions d'existence
 - A. Le SRBM (Semimartingale Reflected Brownian Motion)
 - B. Cas transient et objets en jeu

- II. Asymptotique des densités de Green
 - A. Le théorème
 - B. Preuve de l'asymptotique

- III. (Ouvert) Cas du Brownien réfléchi dégénéré ?

Théorème : Conditions de transience (Hobson-Rogers, 1993)

$(Z_t)_{t \geq 0}$ est transient si et seulement si

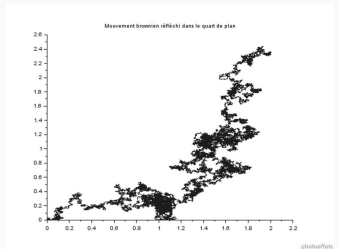
$$r_{11}\mu_1 - r_{21}\mu_2^- \geq 0 \quad \text{ou} \quad r_{12}\mu_1^- - r_{22}\mu_2 \leq 0.$$

Récurrence et transience : compétition drift/réflexion

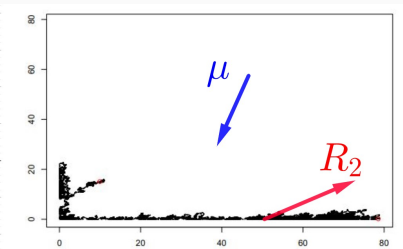
Théorème : Conditions de transience (Hobson-Rogers, 1993)

$(Z_t)_{t \geq 0}$ est transient si et seulement si

$$r_{11}\mu_1 - r_{21}\mu_2^- \geq 0 \quad \text{ou} \quad r_{12}\mu_1^- - r_{22}\mu_2 \leq 0.$$



(a) Exemple où $\mu_1, \mu_2 > 0$.



(b) Fuite selon un axe

On suppose que μ pointe vers l'extérieur : Z est transient.

Définition : / Proposition : Mesure de Green issue de z_0

La mesure suivante admet une densité $g^{(z_0)}$ dans le cone :

$$G(z_0, A) := \mathbb{E}_{z_0} \left[\int_0^\infty \mathbf{1}_A(Z_t) dt \right] = \iint_A g^{(z_0)}(x, y) dx dy$$

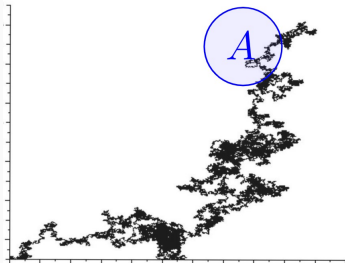


Figure 5 – Temps passé dans A.

- I. Qu'est-ce donc ? Conditions d'existence
 - A. Le SRBM (Semimartingale Reflected Brownian Motion)
 - B. Cas transient et objets en jeu

- II. Asymptotique des densités de Green
 - A. Le théorème
 - B. Preuve de l'asymptotique

- III. (Ouvert) Cas du Brownien réfléchi dégénéré ?

- I. Qu'est-ce donc ? Conditions d'existence
 - A. Le SRBM (Semimartingale Reflected Brownian Motion)
 - B. Cas transient et objets en jeu

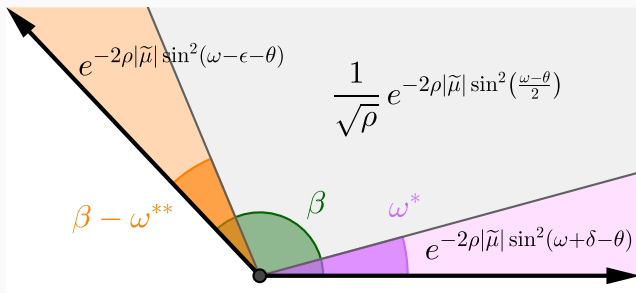
- II. Asymptotique des densités de Green
 - A. Le théorème
 - B. Preuve de l'asymptotique

- III. (Ouvert) Cas du Brownien réfléchi dégénéré ?

Théorème : Asymptotique de la densité de Green

Soient $\omega^* = \theta - 2\delta$ and $\omega^{**} = \theta + 2\epsilon$. On a les asymptotiques pour $\tilde{g}^{(z_0)}(\rho \cos(\omega), \rho \sin(\omega))$, $\rho \rightarrow \infty, \omega \rightarrow \omega_0 \notin \{0, \omega^*, \omega^{**}, \beta\}$:

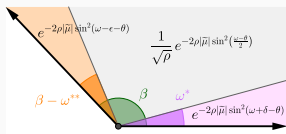
$$\tilde{g}^{(z_0)}(\rho \cos(\omega), \rho \sin(\omega)) \sim \dots$$



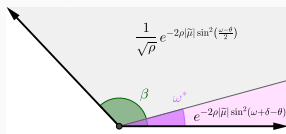
(a) $0 < \omega^* < \omega^{**} < \beta$

Remarques

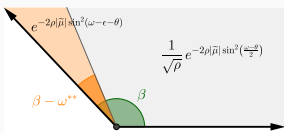
- Selon les angles des paramètres, on a 4 configurations



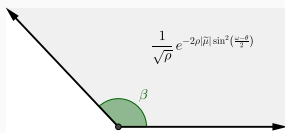
(a) $0 < \omega^* < \omega^{**} < \beta$



(b) $0 < \omega^* < \beta < \omega^{**}$



(c) $\omega^* < 0 < \omega^{**} < \beta$



(d) $\omega^* < 0 < \beta < \omega^{**}$

- Développement asymptotique (zone milieu :))

$$\tilde{g}(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega) \underset{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \omega_0}}{\sim} e^{-2\rho|\tilde{\mu}|\sin^2(\frac{\omega - \theta}{2})} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{k=0}^n \frac{\tilde{c}_k(\omega)}{\rho^k}$$

- I. Qu'est-ce donc ? Conditions d'existence
 - A. Le SRBM (Semimartingale Reflected Brownian Motion)
 - B. Cas transient et objets en jeu

- II. Asymptotique des densités de Green
 - A. Le théorème
 - B. Preuve de l'asymptotique

- III. (Ouvert) Cas du Brownien réfléchi dégénéré ?

On se place dans le quadrant \mathbb{R}_+^2 .

- ▷ Définition des mesures de Green sur les bords
- ▷ Transformées de Laplace, **equation fonctionnelle** et extension des transformées de Laplace
- ▷ **Inversion de Laplace**
- ▷ Théorème des résidus
- ▷ Méthode de **point col**

Définition : Transformée de Laplace de la mesure de Green

$$\varphi(x, y) := \mathbb{E}_{z_0} \left[\int_0^\infty e^{(x,y) \cdot Z_t} dt \right] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{ux+vy} g(u, v) dudv$$

Définition : Mesure de Green sur les bords et Laplace

Pour $i \in \{1, 2\}$, on définit la mesure

$$H_i(z_0, A) := \mathbb{E}_{z_0} \left[\int_0^\infty \mathbf{1}_A(Z_t) dL_t^i \right]$$

et les transformées de Laplace de H_1, H_2 :

$$\varphi_1(y) := \mathbb{E}_{z_0} \left[\int_0^\infty e^{(x,y) \cdot Z_t} dL_t^1 \right], \quad \varphi_2(x) := \mathbb{E}_{z_0} \left[\int_0^\infty e^{(x,y) \cdot Z_t} dL_t^2 \right]$$

Equation fonctionnelle

$$\begin{cases} \gamma(x, y) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}x + 2\sigma_{12}xy + \sigma_{22}y^2) + \mu_1x + \mu_2y \\ \gamma_1(x, y) = r_{11}x + r_{21}y, \quad \gamma_2(x, y) = r_{12}x + r_{22}y \end{cases}$$

Théorème : Convergence et équation fonctionnelle

Si $\Re(x) < 0$, $\Re(y) < 0$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi(x, y)$ convergent et

$$-\gamma(x, y)\varphi(x, y) = \gamma_1(x, y)\varphi_1(y) + \gamma_2(x, y)\varphi_2(x) + e^{(x, y) \cdot z_0}$$

Démonstration.

On applique Ito à $z \mapsto \exp((x, y) \cdot z)$ et Z sur $[0, t]$, on prend l'espérance puis $t \rightarrow +\infty$. □

Extension des transformées de Laplace

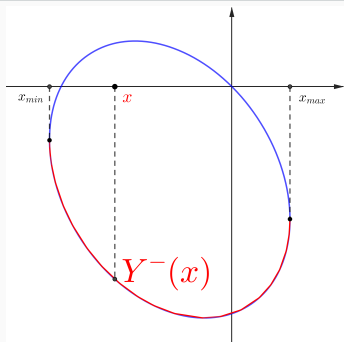


Figure 8 – Plan réel en (x, y) . L'équation $\gamma(x, y) = 0$ est l'équation d'une ellipse. On obtient **une branche complexe $Y^-(x)$** telle que $\gamma(x, Y^-(x)) = 0$.

Extension des transformées de Laplace

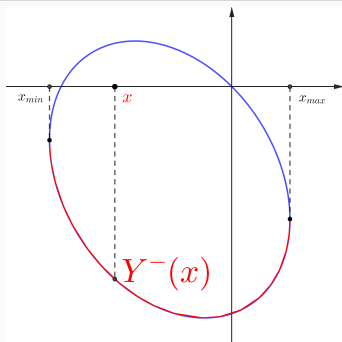


Figure 8 – Plan réel en (x, y) . L'équation $\gamma(x, y) = 0$ est l'équation d'une ellipse. On obtient **une branche complexe $Y^-(x)$** telle que $\gamma(x, Y^-(x)) = 0$.

Lemme : Prolongement des transformées de Laplace

On a $\Re(Y^-(x)) < 0$ pour $\Re x < x_{max}$ donc φ_2 se prolonge méromorphiquement par

$$\varphi_2(x) = \frac{-\gamma_1(x, Y^-(x))\varphi_1(Y^-(x)) - \exp(a_0x + b_0Y^-(x))}{\gamma_2(x, Y^-(x))}.$$

Pole et Ellipse

Proposition

La fonction φ_2 admet un pôle si et seulement si

$$\gamma_2(x_{max}, Y^\pm(x_{max})) > 0.$$

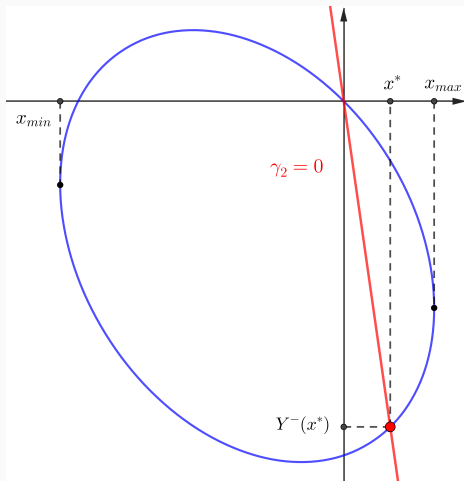


Figure 9 – Cas φ_2 admet un pôle

▷ Inversion de Laplace :

$$g(a, b) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\epsilon - i\infty}^{-\epsilon + i\infty} \int_{-\epsilon - i\infty}^{-\epsilon + i\infty} \varphi(x, y) \exp(-ax - by) dx dy.$$

Inversion de Laplace et Résidus

▷ Inversion de Laplace :

$$g(a, b) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \varphi(x, y) \exp(-ax - by) dx dy.$$

Mais

$$\varphi(x, y) = -\frac{\gamma_1(x, y)\varphi_1(y)}{\gamma(x, y)} - \frac{\gamma_2(x, y)\varphi_2(x)}{\gamma(x, y)} - \frac{e^{(x, y) \cdot z_0}}{\gamma(x, y)}$$

$$\text{Donc } g(a, b) = I_1 + I_2 + I_3$$

Inversion de Laplace et Résidus

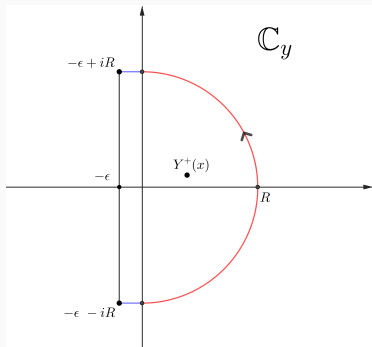
▷ Inversion de Laplace :

$$g(a, b) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \varphi(x, y) \exp(-ax - by) dx dy.$$

Mais

$$\varphi(x, y) = -\frac{\gamma_1(x, y)\varphi_1(y)}{\gamma(x, y)} - \frac{\gamma_2(x, y)\varphi_2(x)}{\gamma(x, y)} - \frac{e^{(x,y)\cdot z_0}}{\gamma(x, y)}$$

Donc $g(a, b) = I_1 + I_2 + I_3$, et on utilise le **théorème des résidus**

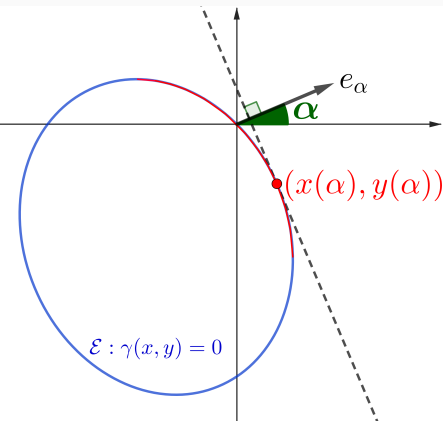


$$\triangleright I_1(a, b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \varphi_2(x) \gamma_2(x, Y^+(x)) e^{-ax - bY^+(x)} \frac{dx}{\gamma'_y(x, Y^+(x))},$$

Asymptotique des intégrales : méthode de point col

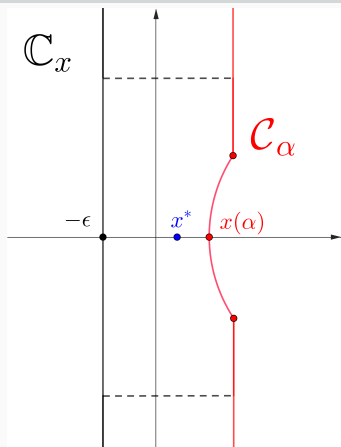
▷ On pose $(a, b) = (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$, $r \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon - i\infty}^{-\epsilon + i\infty} \varphi_2(x) \gamma_2(x, Y^+(x)) e^{r(\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)Y^+(x))} \frac{dx}{\gamma'_y(x, Y^+(x))}$$



On prend $(x(\alpha), y(\alpha)) = \operatorname{argmax}_{(x,y): \gamma(x,y)=0} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$.

Déformation du contour et compétition pole et col



Soit \mathcal{C}_α passant par le chemin de plus grande pente en $x(\alpha)$.

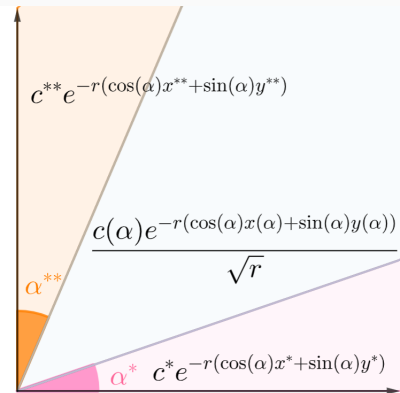
$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \right) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\mathcal{C}_\alpha} \right) + \mathbf{1}_{x^* < x(\alpha)} c^* e^{-ax^* - by^*} \end{aligned}$$

Méthode du point col :

$$\frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\mathcal{C}_\alpha} \right) \sim e^{-r(\cos(\alpha)x(\alpha) + \sin(\alpha)y(\alpha))} \frac{c_1(\alpha)}{\sqrt{r}}$$

Bilan de la preuve

- ▷ Compétition pole - point col.
- ▷ Idem pour l'étude de l_2 et l_3



On a

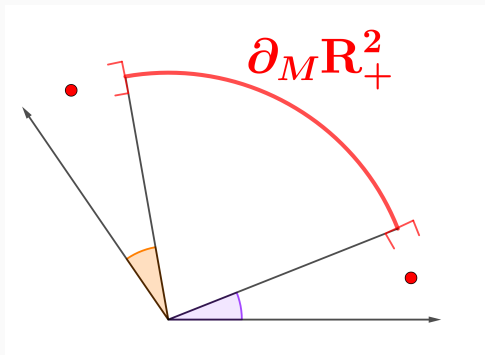
$$\begin{aligned}
 c(\alpha) &= h_\alpha(z_0) \\
 &= (\gamma_1(x(\alpha), y(\alpha))\varphi_1(y(\alpha)) \\
 &\quad + \gamma_2(x(\alpha), y(\alpha))\varphi_2(x(\alpha)) \\
 &\quad + \exp(z_0 \cdot (x(\alpha), y(\alpha)))) \underbrace{\times C(\alpha)}_{\text{indep. } z_0}
 \end{aligned}$$

- ▷ (Technique) Les constantes devant les équivalents sont non nulles (Prop de Markov)

Lien avec la frontière de Martin

$$\tilde{g}^{(z_0)}(\rho \cos(\omega), \rho \sin(\omega)) \sim$$

$$\begin{cases} h_\omega(z_0) \frac{e^{-2\rho|\tilde{\mu}| \sin^2\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)}}{\sqrt{\rho}} & \text{si } 0 < \omega^* < \omega < \omega^{**} < \beta \\ c^* e^{-2\rho|\tilde{\mu}| \sin^2(\omega+\delta-\theta)} & \text{si } 0 < \omega < \omega^* \\ c^{**} e^{-2\rho|\tilde{\mu}| \sin^2(\omega+\delta-\theta)} & \text{si } \omega^{**} < \omega < \beta \end{cases}$$



(a) Frontière de Martin ∂R_+^2 (cas $0 < \omega^* < \omega^{**} < \beta$)

- I. Qu'est-ce donc ? Conditions d'existence
 - A. Le SRBM (Semimartingale Reflected Brownian Motion)
 - B. Cas transient et objets en jeu

- II. Asymptotique des densités de Green
 - A. Le théorème
 - B. Preuve de l'asymptotique

- III. (Ouvert) Cas du Brownien réfléchi dégénéré?

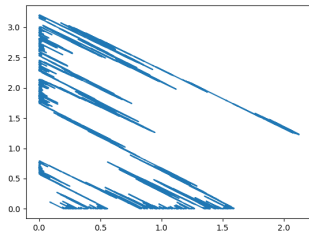
Modèle dégénéré - lien particules ?

- Tomoyuki Ichiba, Ioannis Karatzas - Degenerate Competing Three-Particle Systems (2021)

Trois particules $X_1 \leq X_2 \leq X_3$ qui s'inter-choquent, et celle du milieu est brownienne : **gapping process** $(X_3 - X_2, X_2 - X_1)$ est un brownien réfléchi.

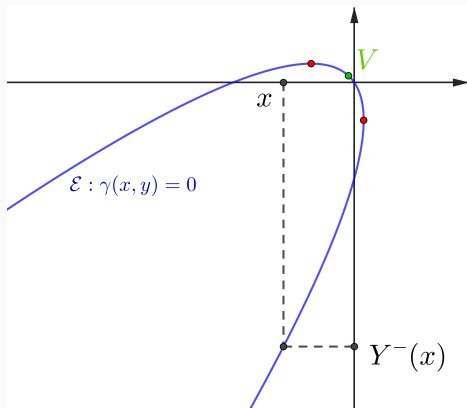


(a) Système de 3 particules
(article Karatzas Ichiba)

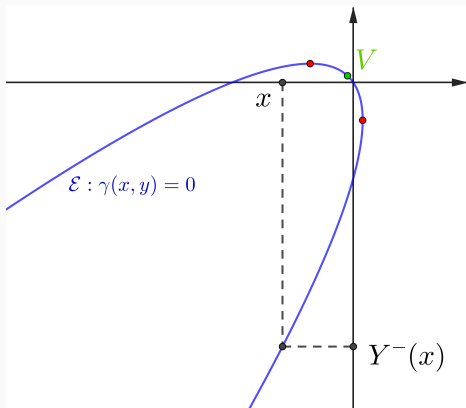


(b) Brownien réfléchi dégénéré

De l'ellipse à la parabole pour le cas dégénéré



De l'ellipse à la parabole pour le cas dégénéré



- Obstacle : Densité de $G^{(z_0)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue? (drift non nul)
- Espoir : Calcul des fonctions harmoniques grâce à la méthode par compensation

Merci pour votre attention !