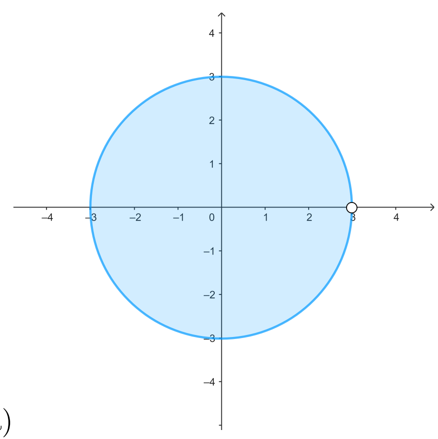
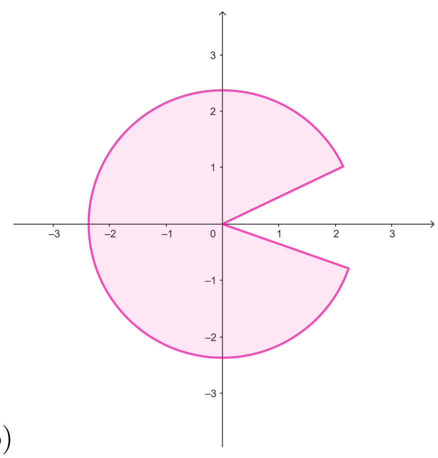
Interrogation 2 de TD : séries et séries de fonctions

Exercice 1 : Questions de cours

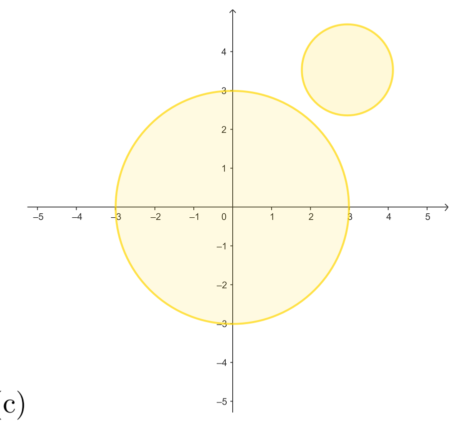
1. (1 point) Donner la définition du rayon de convergence.
2. (1 point) Vrai ou faux? “Une série entière converge normalement sur son disque ouvert de convergence”. Si oui, justifier. Sinon, donner un contre exemple.
3. (1 point) Parmi les domaines représentés dans les figures ci-dessous, dire lesquels ne peuvent pas être les domaines de convergence d’une série entière. Justifier.



(a)



(b)



(c)

Exercices 2 : Questions indépendantes

1. (1 point) Déterminer les types de convergence (simple, uniforme, normale) sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^2}.$$
2. (1 point) Même question sur $[1, +\infty[$ pour la série de fonctions
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x + \ln(x)}.$$
3. (1 point) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin(n) z^n$.
4. (1 point) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \ln^4(n) z^n$.

Exercice 3 : Étude d’une fonction définie par une série

Pour $x > 0$, on pose :
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+n^2}.$$

1. (1 point) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. (1.5 points) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. (1 point) Calculer $S(0)$.
4. (1 point) Déterminer la limite de S en $+\infty$.