Interrogation 3 de TD : Analyse fonctionnelle

Le sujet est très long, il est tout à fait possible d'obtenir 10/10 sans traiter l'intégralité du sujet.

Exercice 1 : Questions indépendantes

1. Cours : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit μ une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$. Montrer que si $p < q$, alors $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$.

2. Cours : Enoncer la définition de base hilbertienne.

3. On considère l'espace $E = L^2([0, 10], \mathcal{B}([0, 10]), dx)$ muni de la norme $\|.\|_2$ habituelle où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 10]$. Après avoir justifié sa continuité et sa bonne définition, calculer la norme de l'application linéaire

$$\phi : \left| \begin{array}{ll} (L^2([0,10]), \|.\|_2) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \int_0^{10} f(t) t^4 dt. \end{array} \right. .$$

Exercice 2 :

On considère l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire usuel $\langle ., . \rangle$ donné par

$$\langle (u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n, \quad (u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \in l^2(\mathbb{N}).$$

1. Si $k \in \mathbb{N}$, on pose l'espace vectoriel $F_k = \{(u_n)_{n\geq 0} \in l^2(\mathbb{N}),\ u_k = 0\}$. Montrer que F_k est fermé dans $l^2(\mathbb{N})$. En déduire que $F := \{(u_n)_{n\geq 0} \in l^2(\mathbb{N}),\ u_{2k} = 0\ \forall k \geq 0\}$ est un espace vectoriel fermé dans $l^2(\mathbb{N})$.

2. Comme F est un sous espace vectoriel fermé, on peut donc parler de la projection orthogonale sur F $p_F : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow F$. Déterminer, pour $u = (u_n)_{n\geq 0} \in l^2(\mathbb{N})$, l'expression de $p_F(u)$. On pourra conjecturer une expression $f(u)$ de $p_C(u)$ puis démontrer soigneusement que $p_C(u) = f(u)$.

Exercice 3 :

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2_{2\pi-per}([0, 2\pi])$ des fonctions $2\pi-$periodiques sur muni du produit scalaire usuel $\langle ., . \rangle$ donné par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt, \quad f, g \in L^2([0, 2\pi]).$$

On fixe $\varphi \in H$ pour le reste de l'exercice. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a \varphi$ la fonction de H donnée par $\tau_a \varphi = \varphi(\cdot - a)$, c'est à dire $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x - a)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche dans cette exercice une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que $Vect(\tau_a\varphi,\ a \in \mathbb{R})$ soit dense dans H. Pour $n \in \mathbb{Z}$, et $f \in H$, on note

$$c_n(f) = \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)dt$$

le $n-$ième coefficient de Fourier de f (où $e_n : t \longmapsto e^{int}$).

1. Montrer que pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,
$$c_n(\tau_a\varphi) = e^{-ina}c_n(\varphi).$$
2. En déduire que pour $f \in H$,
$$\langle f, \tau_a\varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}c_n(\varphi)e^{-ina}.$$
On pourra utiliser librement que si $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H, alors pour $f, g \in H$, on a $\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, e_n\rangle\langle e_n, g\rangle$.
3. Soit $f \in H$. Justifier que la famille $\left(\overline{c_n(f)}c_n(\varphi)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. *Indication : on pourra utiliser l'inégalité $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.*
4. Supposons que $c_n(\varphi) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Soit $f \in H$ tel que $\langle f, \tau_a\varphi\rangle = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   (b) En déduire la densité de $Vect(\tau_a\varphi,\ a \in \mathbb{R})$ dans H.
5. Supposons désormais qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $c_n(\varphi) = 0$. Montrer que $Vect(\tau_a\varphi,\ a \in \mathbb{R})$ n'est pas dense dans H.