Devoir Maison : Séries - Séries de fonctions

Exercice 1 :

Montrer que l'équation différentielle suivante admet une solution f développable en série entière au voisinage de 0 telle que $f(0) = 1$:

$$xy'' + y' + y = 0.$$

Exercice 2 :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini, et soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la somme de cette série entière.

1. Montrer que si $r > 0$,
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = a_n r^n.$$
On justifiera soigneusement toute interversion série-intégrale.

2. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$ (i.e. qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$). Montrer que f est constante. On pourra utiliser la question précédente et montrer que $a_n = 0$ pour $n \geq 1$.

Exercice 3 :

On pose la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $2\pi-$periodique définie par $f(x) = \frac{x}{\pi} - \frac{x^3}{\pi^3}$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Tracer f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2. Calculer la série de Fourier $S(f)$ de f. La série $S(f)$ converge-t-elle vers f? Justifier.

3. En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)^3}$.

4. Appliquer l'égalité de Parseval pour déterminer la valeur de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.