

Exercice 1

①

1) Soit $f \in L^q(\mu)$. On considère réel que $\frac{1}{(q/p)} + \frac{1}{r} = 1$ (possible car $\frac{q}{p} > 1$)

$$\text{Alors : } \int_X |f|^p d\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 d\mu \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_X |f|^{p \cdot \frac{q}{p}} d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_X 1^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \underbrace{\left(\int_X |f|^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}}}_{< +\infty} \underbrace{\mu(X)^{\frac{1}{r}}}_{< +\infty \text{ (hypothèse)}} < +\infty$$

car $f \in L^q(\mu)$

Donc $f \in L^p(\mu)$

2) f connu

3) Si $f \in L^p([0,10])$, $\left[|f(t)t^4| \leq 10^4 |f(t)| \quad \forall t \in [0,10] \right]$
intégrable sur $[0,10]$ car
 $[0,10]$ est de mesure finie
et $p \geq 1$.

Donc ϕ est bien définie. De plus, ϕ est clairement linéaire (par

linéarité de l'intégrale)

De plus, pour $f \in \mathcal{L}([0,10])$,

$$|\phi(f)| \leq \int_0^{10} t^4 |f(t)| dt \stackrel{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \left(\int_0^{10} t^8 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{10} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{10^9}{9}} \|f\|_p$$

Donc ϕ est continue et $\|\phi\| \leq \sqrt{\frac{10^9}{9}}$

En prenant $f(t) = t^4$, on a égalité dans Cauchy et ainsi Schwarz ②

$$|\phi(\ell)| = \frac{\sqrt{10^9}}{3} \|\ell\|_p, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\|\phi\| = \frac{\sqrt{10^9}}{3}}.$$

Exercice 2

1) Soit borné. L'application linéaire $e_B: (\ell^2(N), \|\cdot\|_2) \rightarrow \mathbb{R}$
 $(u_n)_{n \geq 0} \mapsto u_B$

$$\text{est continue car } \underbrace{|e_B((u_n)_{n \geq 0})|}_{= |u_B|} \leq \left(\sum_{n \geq 0} |u_n|^2 \right)^{1/2} = \underbrace{\|(u_n)_{n \geq 0}\|_2}_{\text{pour } (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(N)}.$$

Or, $F_B = e_B^{-1}(\{0\})$ donc F_B est fermé dans $\ell^2(N)$.

Ainsi, $F = \bigcap_{B \geq 0} \underbrace{F_{2B}}_{\text{fermé}}$ est fermé dans $\ell^2(N)$.

2) On pose $f: \ell^2(N) \rightarrow \ell^2(N)$.

$$(u_n)_{n \geq 0} \mapsto (0, u_1, 0, u_3, \dots) = (u_n)_{n \text{ impair}} \quad n \geq 0.$$

→ On a clairement $f(u) \in F$ pour tout $u \in \ell^2(N)$.

→ Pour tout $u \in \ell^2(N)$, $\langle u - f(u), v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (u - f(u))_n \cdot v_n$
 et tout $v \in F$,

$$= \sum_{n \text{ pair}} u_n \cdot 0 + \sum_{n \text{ impair}} \overbrace{(u_n - u_n)}^{=0} \cdot v_n = 0$$

i.e. $u - f(u) \perp F$.

Donc : par caractérisation du projeté orthogonal, $\boxed{f = p_C}$ ③

Exercice 3

1) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$c_n(\tau_a \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t-a) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi-a} \varphi(u) e^{-in(u+a)} du$$

$u = t - a$

φ est 2π -périodique $\Rightarrow e^{-ina} c_n(\varphi)$

2) $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{C}, 2\pi)$ d'où : (par le cours) :

$$\langle \tau_a \varphi, e_n \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle e_m, e_n \rangle \langle e_m, \tau_a \varphi \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\langle e_m, e_n \rangle} \langle e_m, \tau_a \varphi \rangle$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{c_m(\beta)} c_m(\tau_a \varphi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{c_m(\beta)} c_m(\varphi) e^{-ina}$$

3) L'identité de Parseval donne $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\beta)|^2 < +\infty$
pour $f \in H$ $= \|c_n(\beta)\|^2$

De même, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 < +\infty$ sommables

$$\text{Or, } |c_n(\beta) c_n(\varphi)| \leq \frac{1}{2} \left(|c_n(\beta)|^2 + |c_n(\varphi)|^2 \right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

indication

donc $(\overline{c_n(\beta)} c_n(\varphi))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable

4) a) On a $\rightarrow (\overline{c_n(\beta)} c_n(\varphi))_{n \in \mathbb{Z}}$ sommable (i.e. $\ell^1(\mathbb{Z})$)
 $\rightarrow$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(\beta)} c_n(\varphi) e^{-ina}$

Donc, par le cours, $\overline{c_n(f)} = c_n(f) = c_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. ④
 $\nwarrow$ fonction nulle.

Donc $\underline{c_n(f) = 0}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, par le cours, $\boxed{f \equiv 0}$.

b) La question 4a) donne $\left(\text{Vect}(z_a \varphi, a \in \mathbb{R}) \right)^\perp = 0$

D'où $\underline{\text{Vect}(z_a \varphi, a \in \mathbb{R}) = H}$ par caractérisation des s.e.v. doubles.

5) Si $c_m(\varphi) = 0$, alors $\langle e_m, \varphi \rangle = 0$ d'où $\langle e_m, z_a \varphi \rangle = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ par la question 4).

Ainsi, $\underline{e_m \in \left(\text{Vect}(z_a \varphi, a \in \mathbb{R}) \right)^\perp}$ d'où $\underline{\text{Vect}(z_a \varphi, a \in \mathbb{R}) \neq H}$
 $\neq 0$