

Correction du devoir maison.

RAPPEL DU
N° DE PLACE

Exercice 1 :

Analyse : Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation différentielle telle que $f(0) = 1$.

On a alors : pour $|x| < R$,

$$x \left(\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \right) + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = 0$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-1}$$

$$\text{Donc} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-1}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} (k+1) x^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} (k+1) x^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right) =$$

$$\text{i.e.} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\underbrace{a_{k+1} ((k+1)k + k+1)}_{= a_{k+1} (k+1)^2} + a_k \right] x^k = 0.$$

Or, $R > 0$. Donc : par le théorème d'identification des séries entières,

$$a_{k+1} (k+1)^2 + a_k = 0 \text{ pour tout } k \geq 0.$$

$$\text{i.e.} \quad a_{k+1} = \frac{-a_k}{(k+1)^2} = \frac{(-1)^2 a_{k-1}}{(k+1)k^2} = \dots = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} a_0$$

avec $a_0 = f(0) = 1$.

$$\text{Donc : } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n (*)$$

Synthèse : La fonction f définie par (*) est une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$ (critère d'Alembert), vérifie $f(0) = 1$ et est solution de l'équation différentielle par les mêmes calculs.

Exercice 2:

$$1) \text{ Si } r > 0, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-m)\theta} \right) d\theta$$

$$\text{Or, } \theta \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-m)\theta} \text{ est une s\u00e9rie de fonctions}$$

convergeant normalement sur $[0, 2\pi]$ donc uniform\u00e9ment

(en effet, $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k r^k| < +\infty$ car le rayon de convergence est infini).

$$\text{Donc } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} a_k r^k e^{i(k-m)\theta} d\theta \right)$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-m)\theta} d\theta}_{= \begin{cases} 2\pi \text{ si } k=m \\ \left[\frac{e^{i(k-m)\theta}}{k-m} \right]_0^{2\pi} = 0 \text{ sinon} \end{cases}} \\ & \stackrel{(**)}{=} \frac{2\pi}{2\pi} a_m r^m = a_m r^m \end{aligned}$$

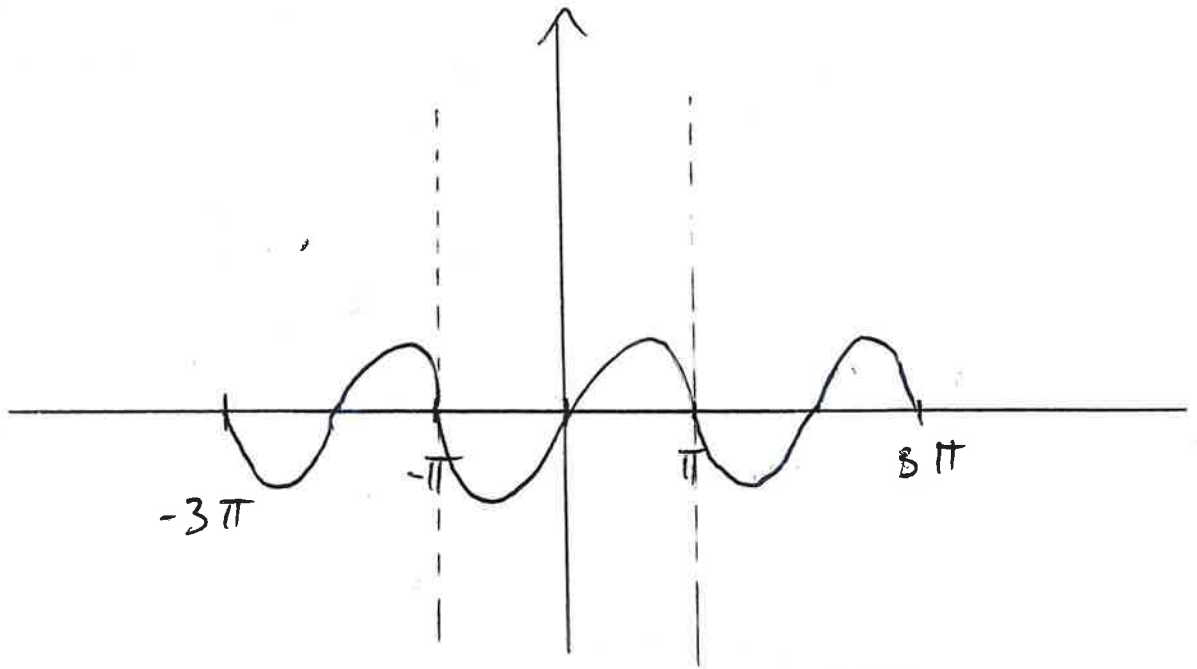
$$\begin{aligned} 2) \text{ Si } m \neq 0, |a_m| &= \frac{1}{r^m} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi r^m} \int_0^{2\pi} M d\theta \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{r^m} M \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc $a_m = 0$. Ainsi, $f = a_0$ est une fonction constante.

Exercice 3

1)



2). f est impaire ($f(-x) = -f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$)

donc pour tout $m \geq 1$, $\underline{a_m(f)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(u)}_{\text{impaire}} \cos(mu) du$

(et de même, $\underline{a_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(u)}_{\text{impaire}} du = 0$)

• Si $m \geq 1$,

$$b_m(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\frac{x}{\pi} - \frac{x^3}{\pi^3} \right)}_{\text{impaire}} \underbrace{\sin(mx)}_{\text{impaire}} dx$$

paire

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x}{\pi} - \frac{x^3}{\pi^3} \right) \sin(mx) dx$$

$$\frac{\pi}{2} b_m(\beta) \stackrel{(\ominus)}{=} \left[\left(\frac{x}{\pi} - \frac{x^3}{\pi^3} \right) \left(\frac{-\cos(\ln x)}{m} \right) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{3x^2}{\pi^3} \right) \frac{\cos(\ln x)}{m} dx$$

$$\stackrel{(\ominus)}{=} 0 + \left[\left(\frac{1}{\pi} - \frac{3x^2}{\pi^3} \right) \frac{\sin(\ln x)}{m^2} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{6x}{\pi^3} \frac{\sin(\ln x)}{m^2} dx$$

$$\stackrel{(\ominus)}{=} 0 + \left[\frac{6x}{\pi^3} \left(\frac{-\cos(\ln x)}{m^3} \right) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{6}{\pi^3} \frac{\cos(\ln x)}{m^3} dx$$

$$= \frac{6}{\pi^3} \left[\frac{\sin(\ln x)}{m^4} \right]_0^{\pi} = 0$$

$$= -\frac{6}{\pi^2 m^3} \cos(m\pi)$$

$$b_m(\beta) = \frac{12}{\pi^3 m^3} (-1)^{m+1}$$

$$\text{Donc } S[f](x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{12}{\pi^3 m^3} (-1)^{m+1} \sin(\ln x)$$

et comme f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux (et 2π -périodique), le théorème de Dini donne $S[f] = f$

3) On prend $x = \frac{\pi}{2}$ dans l'égalité $S[f](x) = f(x)$,
notons que $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (-1)^p & \text{si } m = 2p+1, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$

$$\text{Donc : } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{12}{\pi^3 (2p+1)^3} (+1) \cdot (-1)^p = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)^3} = -\frac{\pi^3 \times 3}{12 \times 8} = \underline{\underline{-\frac{\pi^3}{32}}}$$

4) Par l'égalité de Parseval,

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(b)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |b(r)|^2 dt \quad \text{i.e.}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{12}{\pi^3 n^3} \right)^2 \stackrel{\text{parité de } |b|^2}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x}{\pi} - \frac{x^3}{\pi^3} \right)^2 dx \stackrel{u = \frac{x}{\pi}}{=} \int_0^1 (u - u^3)^2 du$$

$$= \int_0^1 (u^2 - 2u^4 + u^6) du = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{35 - 42 + 15}{105} \\ = \frac{8}{105}$$

Bilan :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \pi^6 \cdot \frac{8}{105 \cdot 72} = \frac{\pi^6}{945}$$