

Séries, intégrales et probabilités

Thierry MEYRE

Préparation à l'agrégation interne.

Université Paris Cité. IREM.

<https://www.lpsm.paris/users/meyre/index>

Table des matières

1	Intégrale de Riemann.	11
1.1	Applications réglées.	11
1.2	Construction de l'intégrale de Riemann	16
1.2.1	Rappels sur les applications linéaires continues	16
1.2.2	Intégrale d'une application en escalier	17
1.2.3	Intégrale d'une application réglée	18
1.2.4	Propriétés élémentaires	20
1.2.5	Intégrale d'une application à valeurs réelles	22
1.3	Outils pratiques de calcul d'une intégrale	26
1.3.1	Utilisation d'une primitive	26
1.3.2	Intégration par parties	30
1.3.3	Changement de variable	32
1.3.4	Exercices suggérés.	34
1.3.5	Applications suggérées.	36
1.4	Sommes de Riemann	37
1.5	Convergences de suites d'applications	40
1.6	Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre	44
1.7	Arcs paramétrés	45
1.7.1	Rectification d'un arc paramétré.	45
1.7.2	Intégrale curviligne d'une forme différentielle.	46
2	Intégrales impropres.	47
2.1	Définition des intégrales impropres.	47
2.2	Étude de la convergence : cas positif	49
2.2.1	Comparaison avec une intégrale de référence.	50
2.2.2	Intégration des relations de comparaison	52
2.2.3	Comparaison avec une série	55
2.3	Cas général : critère de Cauchy et autres méthodes.	56
2.3.1	Critère de Cauchy et conséquences.	56
2.3.2	Méthodes directes	59
2.4	Calcul des intégrales impropres	60

2.4.1	Intégration par parties généralisée	60
2.4.2	Changement de variable généralisé	62
2.5	Application à l'étude de séries.	62
2.6	Transformée de Laplace à variable réelle	67
2.6.1	Quelques propriétés générales	67
2.6.2	Transformée de Laplace et calcul des probabilités	69
3	Intégration sur un intervalle quelconque	71
3.1	Fonctions intégrables	71
3.1.1	Le cas positif	71
3.1.2	Le cas réel	72
3.1.3	Le cas complexe	73
3.2	Théorèmes de convergence	73
3.3	Intégrale dépendant d'un paramètre	80
3.3.1	Étude de la continuité	80
3.3.2	Étude de la dérivabilité	84
3.4	La fonction Γ d'Euler	86
3.5	Transformation de Laplace à variable complexe	90
4	Intégrales multiples	93
4.1	Intégrale double sur un domaine simple borné	93
4.2	Intégrale double sur un produit d'intervalles quelconques	94
4.2.1	Le cas positif	95
4.2.2	Le cas réel ou complexe	96
4.3	Changement de variable	98
5	Méthodes de calcul approché d'une intégrale	101
5.1	Intégrale d'une fonction polynomiale.	102
5.1.1	Rang et ordre d'une méthode de quadrature	102
5.1.2	Exemples pour $p = 0$	104
5.1.3	Exemples avec une subdivision régulière : méthodes de Newton-Cotes	105
5.2	Interpolation polynomiale.	108
5.2.1	Interpolation de Lagrange et Hermite	109
5.2.2	Évaluation de l'erreur	109
5.3	Intégration numérique	111
5.3.1	Avec un polynôme de Lagrange	111
5.3.2	Avec un polynôme d'Hermite	112
5.3.3	Méthodes composées.	115
5.3.4	Lien avec la méthode de Romberg-Richardson	116
5.4	Méthodes de quadrature de Gauss.	117

5.5	Une méthode probabiliste	118
6	Applications de l'analyse au calcul des grandeurs	119
6.1	Longueur d'un arc de classe C^1	119
6.1.1	Rectification d'un arc paramétré.	119
6.1.2	Calcul pratique	121
6.2	Produit mixte et produit vectoriel dans \mathbb{R}^n	124
6.2.1	Orientation de \mathbb{R}^n	124
6.2.2	Produit mixte dans \mathbb{R}^n euclidien orienté	125
6.2.3	Produit vectoriel dans \mathbb{R}^n euclidien orienté	126
6.2.4	Interprétations géométriques en dimension 3	128
6.3	Théorème du changement de variables	129
6.3.1	Enoncé général	129
6.3.2	Quelques cas particuliers	131
6.4	Formule de Green-Riemann	134
6.5	Aire d'une nappe géométrique	134
6.5.1	Nappe paramétrée, nappe géométrique	134
6.5.2	Aire d'une nappe géométrique	136
7	Espaces de Banach, suites et séries	137
7.1	Définition et premiers exemples	137
7.2	Séries à termes réels positifs	138
7.2.1	Définitions et théorèmes de comparaison	138
7.2.2	Comparaison à une série géométrique	141
7.2.3	Série et intégrale impropre positives.	143
7.3	Séries à valeurs dans un espace de Banach	144
7.4	Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions	146
7.5	Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach . . .	149
7.6	Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach . . .	152
8	Exponentielle dans une algèbre de Banach	155
8.1	Définitions et premières propriétés	155
8.2	Exponentielle de matrice	158
8.2.1	Calcul explicite	159
8.2.2	Quelques applications topologiques	163
8.2.3	Application aux systèmes différentiels linéaires	164
9	Espaces préhilbertiens	167
9.1	Produit scalaire sur un \mathbb{K} -espace vectoriel.	167
9.2	Norme euclidienne, norme hermitienne	169
9.3	Orthogonalité et procédé de Gram-Schmidt	171

9.4	Projection orthogonale, meilleure approximation	173
9.5	Inégalité de Bessel et égalité de Parseval	176
10	Séries de Fourier	179
10.1	Polynôme et série trigonométriques	180
10.2	Coefficients et série de Fourier	182
10.3	Le théorème de convergence de Dirichlet	184
10.4	Le théorème de Fejér	188
10.5	Approximation en moyenne quadratique	192
11	Séries entières	197
11.1	L'algèbre des séries entières	197
11.2	Rayon de convergence	198
11.3	Continuité et dérivabilité	202
11.4	Principe des zéros isolés	205
11.5	Formule de Cauchy, égalité de Parseval	207
11.6	Fonctions développables en série entière	209
12	Espaces mesurés. Espaces probabilisés.	213
12.1	Clans et tribus.	213
12.1.1	Définitions.	213
12.1.2	Clans et tribus engendrés.	215
12.2	Mesures positives.	216
12.2.1	Définitions.	216
12.2.2	Propriétés d'une mesure.	217
12.3	Application à la modélisation du hasard.	220
12.3.1	Un modèle simple : le modèle additif.	220
12.3.2	Modèle définitif : les espaces probabilisés.	225
12.4	Probabilités conditionnelles. Indépendance d'événements.	227
12.4.1	Définition des probabilités conditionnelles.	227
12.4.2	Formule de Bayes.	230
12.4.3	Indépendance d'événements.	231
12.5	Exercices.	234
12.5.1	Clans.	234
12.5.2	Formule de Poincaré.	235
12.5.3	Équiprobabilité.	236
12.5.4	Probabilités conditionnelles.	237
12.5.5	Événements indépendants.	238

13 Variables aléatoires réelles	243
13.1 La tribu borélienne réelle	243
13.2 Les variables aléatoires réelles et leurs lois	245
13.3 Fonction de répartition d'une v.a.r.	248
13.4 Variables discrètes	250
14 Variables à densité	255
14.1 Définitions	255
14.2 Exemples classiques de lois à densité	256
14.3 Fonction de répartition	258
14.4 Espérance. Théorème de transfert	260
14.5 Moments d'une variable aléatoire	261
14.6 Exercices sur les fonctions de répartition	262
14.6.1 Minimum de variables exponentielles.	262
14.6.2 Variables amnésiques.	262
14.6.3 Loi du χ^2 à un degré de liberté.	262
14.6.4 Loi gaussienne dans \mathbb{R}	263
14.6.5 Avec une loi de Cauchy.	263
15 Vecteurs aléatoires et indépendance	265
15.1 Les vecteurs aléatoires et leurs lois	266
15.2 Vecteurs aléatoires discrets	268
15.3 Vecteurs aléatoires à densité	268
15.4 Indépendance de p v.a.r.	272
15.5 Produit de convolution de densités	274
15.6 Exercices	277
15.6.1 Calcul de densité marginale.	277
15.6.2 Densité gaussienne en dimension 2.	277
15.6.3 Loi uniforme sur le disque	277
15.6.4 Gauss et Cauchy.	278
15.6.5 Avec des lois exponentielles.	278
15.6.6 Méthode de Box-Muller	278
16 Loi des grands nombres.	281
16.1 Suite indépendante équadistribuée.	282
16.2 Convergences de suites de v.a.r.	285
16.2.1 Événements négligeables, égalité presque sûre.	285
16.2.2 Convergences en probabilité et presque sûre.	286
16.3 Loi des grands nombres	288

17 Loi normale	291
17.1 La loi normale centrée réduite	291
17.2 La loi normale générale	293
17.3 Approximation normale de la loi binomiale	295
18 Le théorème-limite central	299
18.1 Énoncé classique	300
18.2 TLC et fonctions de répartition	301
18.3 Un énoncé sans équidistribution	304
18.4 Test du χ^2 d'ajustement.	305

Chapitre 9

Espaces préhilbertiens

9.1 Produit scalaire sur un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Le mot *scalaire* renvoyant à un élément du corps \mathbb{K} , nous allons d'abord considérer le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, puis — dans une seconde définition — nous traiterons le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 9.1.1 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ de $E \times E$ dans \mathbb{R} qui est :

- symétrique : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$
- linéaire à droite :

$$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle;$$

- définie positive : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \langle x, x \rangle > 0.$

Remarque. Les deux premières propriétés impliquant la linéarité à gauche, nous pouvons dire de façon équivalente qu'un produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition 9.1.2 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ de $E \times E$ dans \mathbb{C} qui est :

- à symétrie hermitienne : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};$
- linéaire à droite :

$$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle;$$

- définie positive : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \langle x, x \rangle > 0.$

Remarque. Les 2 premières propriétés impliquant la *semi-linéarité à gauche* :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle x_1, y \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle x_2, y \rangle,$$

nous pouvons dire de façon équivalente qu'un produit scalaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel est une forme *sesquilinéaire*¹ hermitienne définie positive.

Définition 9.1.3 On appelle \mathbb{K} -espace préhilbertien tout \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exemples :

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $E = C^0([0, 1], \mathbb{C})$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = l_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$, $\langle (u_n), (v_n) \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$, la convergence de cette série résultant de l'inégalité $|u_n v_n| \leq (u_n^2 + v_n^2)/2$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = \int_{]a, b[} f g \omega$, où $\omega \in C^0(]a, b[, \mathbb{R}_+^*)$ est intégrable sur l'intervalle $]a, b[$.

L'exemple suivant de \mathbb{C} -espace préhilbertien joue un rôle important dans la théorie des séries de Fourier, que nous aborderons dans le chapitre suivant.

Proposition 9.1.4 Notons \mathcal{D} le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de $C_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des applications 2π -périodiques vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

On définit un produit scalaire sur \mathcal{D} en posant :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{D}^2, \quad \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Le \mathbb{C} -espace \mathcal{D} muni de ce produit scalaire est appelé espace préhilbertien de Dirichlet.

Démonstration: La seule difficulté est de vérifier que $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. Si f est continue, c'est immédiat mais dans le cas général, il faut couper l'intégrale le long de la subdivision par la relation de Chasles puis utiliser $f(a_i) = \frac{1}{2}(f(a_i+) + f(a_i-))$ en tout point a_i de la subdivision. Le lecteur pourra consulter [DAN 377-378] pour les détails.

1. du latin *sesqui* qui signifie « un et demi ».

□

Remarque. À toute application $f \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π -périodique, nous pouvons associer sa « régularisée » $\tilde{f} \in \mathcal{D}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \frac{f(x-) + f(x+)}{2}. \quad (9.1)$$

Sur une période donnée, par exemple $[0, 2\pi]$, f et \tilde{f} ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, inclus dans l'ensemble des discontinuités de f .

9.2 Norme euclidienne, norme hermitienne

Soit E un \mathbb{K} -espace préhilbertien. Notons, pour tout $x \in E$, $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Cette notation sera justifiée ci-dessous en prouvant que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

Proposition 9.2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Dans le \mathbb{K} -espace préhilbertien E , nous avons l'inégalité :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec égalité si, et seulement si, les vecteurs x et y sont liés.

Démonstration: Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, nous définissons l'application $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $P(\lambda) := \|\lambda x + y\|^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

Ainsi, P est une application polynomiale de degré au plus 2 qui ne prend que des valeurs positives ou nulles. Nous en déduisons que son discriminant (réduit) $\Delta' = \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$ est négatif ou nul, ce qui nous permet de conclure.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nous considérons $(x, y) \in E^2$ arbitraire fixé et nous choisissons $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que $\langle x, y \rangle = \rho e^{i\theta}$. Nous définissons alors $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $P(\lambda) := \|\lambda e^{i\theta} x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \rho + \|y\|^2$.

Nous concluons alors comme dans le cas réel. □

Proposition 9.2.2 (Inégalité de Minkowski) *Dans le \mathbb{K} -espace préhilbertien E , nous avons l'inégalité :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Démonstration: Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

d'où la conclusion. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nous utilisons :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2,$$

puis nous concluons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. \square

Corollaire et définition 9.2.3 Soit E un \mathbb{K} -espace préhilbertien. L'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

est une norme sur le \mathbb{K} -espace vectoriel E .

Lorsqu'une norme est ainsi associée à un produit scalaire, on l'appelle norme euclidienne si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et norme hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

L'inégalité de Minkowski étant établie, le lecteur vérifiera facilement que $\|\cdot\|$ est bien une norme. Un \mathbb{K} -espace préhilbertien est donc un espace vectoriel normé particulier.

Remarque. Un espace préhilbertien complet est appelé *espace de Hilbert*.

Grâce à un simple calcul, le lecteur vérifiera la proposition suivante.

Proposition 9.2.4 (Identité du parallélogramme) Dans le \mathbb{K} -espace préhilbertien E , nous avons l'égalité :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Remarques.

1. Cette identité nous permet de montrer que, sur $E = \mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas euclidiennes en prenant $x = (1, 0, \dots, 0)$ et $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$.
2. Le *théorème de Fréchet-Von Neumann-Jordan* affirme que l'identité du parallélogramme caractérise les normes euclidiennes pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et les normes hermitiennes pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Le lecteur intéressé trouvera un plan détaillé de démonstration pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans « Topologie et Analyse » par Georges Skandalis chez Dunod, pages 272 et 318, ou encore dans l'exercice corrigé [SKA 39].

9.3 Orthogonalité et procédé de Gram-Schmidt

Nous allons maintenant généraliser la notion d'orthogonalité bien connue en géométrie classique au cas des espaces préhilbertiens.

Définition 9.3.1 Soit E un \mathbb{K} -espace préhilbertien et $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux et l'on note $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle = 0$.

Théorème 9.3.2 (Pythagore) Dans un \mathbb{K} -espace préhilbertien E , pour tout $(x, y) \in E^2$, nous avons l'implication :

$$x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration: Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'égalité $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ nous donne même l'équivalence.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'égalité $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ nous donne en fait l'équivalence : $\langle x, y \rangle$ imaginaire pur $\Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. □

Définition 9.3.3 Une famille $(e_i)_{i \in I} \in E^I$, où I est un ensemble quelconque, est dite orthogonale si, pour tout $(i, j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j$. Cette famille est dite orthonormée² si, en outre, $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

Proposition 9.3.4 Une famille orthogonale $(e_i)_{i \in I} \in E^I$ est libre dès que $e_i \neq 0$, pour tout $i \in I$.

Démonstration: Soit J sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires telle que $\sum_{j \in J} \lambda_j e_j = 0$. Alors, pour tout $i \in J$, nous avons :

$$\left\langle e_i, \sum_{j \in J} \lambda_j e_j \right\rangle = 0 = \lambda_i \|e_i\|^2,$$

d'où $\lambda_i = 0$, ce qui nous permet de conclure. □

L'exemple suivant nous sera très utile pour étudier les séries de Fourier.

Proposition 9.3.5 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous définissons $e_n \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e_n(x) = \exp(inx).$$

Alors, dans l'espace préhilbertien de Dirichlet \mathcal{D} , la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale.

2. ou orthonormale

Démonstration: Les applications $e_n, n \in \mathbb{Z}$ sont toutes 2π -périodiques et continues donc appartiennent à \mathcal{D} . D'après la définition du produit scalaire dans \mathcal{D} (cf. Proposition 9.1.4), nous avons :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad \langle e_m, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imx} e^{inx} dx.$$

Si $m \neq n$, nous obtenons donc :

$$\langle e_m, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Si $m = n$, nous calculons immédiatement $\|e_n\|^2 = 1$. □

Théorème 9.3.6 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Pour toute famille libre (x_1, \dots, x_n) du \mathbb{K} -espace préhilbertien E , il existe une famille orthonormale (e_1, \dots, e_n) telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k).$$

Démonstration: Il suffit de poser $y_1 = x_1$ et $e_1 = y_1/\|y_1\|$, puis de poursuivre la construction par récurrence sur $k \leq n$, en posant :

$$y_k := x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, x_k \rangle e_i \quad \text{et} \quad e_k := \frac{y_k}{\|y_k\|}.$$

□

Remarques.

1. Dans le théorème précédent, on a existence et unicité de la famille orthonormale (e_1, \dots, e_k) si l'on ajoute la condition supplémentaire :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \langle e_k, x_k \rangle \geq 0.$$

2. Cette construction par récurrence se généralise au cas d'une famille libre dénombrable $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E . On obtient alors une famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$.
3. La même idée permet de construire des suites de *polynômes orthogonaux* permettant le calcul de valeurs approchées de certaines intégrales : voir [SKA 33-38].

Corollaire 9.3.7 *Tout sous-espace-vectoriel F de dimension finie du \mathbb{K} -espace préhilbertien E admet une base orthonormée.*

Remarques.

1. D'après la remarque précédente, si F est un sous-espace vectoriel de E admettant une base dénombrable $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, alors F admet une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Soit F un sous-espace de dimension finie n de E et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de F . Nous calculons alors facilement :

$$\forall x \in F, \quad x = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle e_k, x \rangle|^2.$$

9.4 Projection orthogonale, meilleure approximation

Définition et proposition 9.4.1 *Pour toute partie A non vide du \mathbb{K} -espace préhilbertien E , on appelle orthogonal de A la partie de E définie par :*

$$A^\perp := \{x \in E, \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque. Pour toute partie A non vide de E , on vérifie facilement :

$$(\text{Vect}A)^\perp = A^\perp.$$

Proposition 9.4.2 *Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $F \subset F^{\perp\perp}$.*

Démonstration: Soit $x \in F$. On a $\langle x, a \rangle = 0$ pour tout $a \in F^\perp$ par définition de F^\perp , d'où $x \in F^{\perp\perp}$. □

Proposition 9.4.3 *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie du \mathbb{K} -espace préhilbertien E , alors $E = F \oplus F^\perp$. En outre, si (e_0, e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de F , la projection orthogonale sur F , c'est-à-dire la projection sur F , parallèlement à F^\perp , est donnée par :*

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k. \quad (9.2)$$

Enfin, on a $F = F^{\perp\perp}$.

Démonstration: On sait que F admet une base orthonormale (e_0, \dots, e_n) . Soit $x \in E$ arbitraire fixé. Nous cherchons $(y, z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y + z$; autrement dit, nous cherchons $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$. Écrivons $y = \sum_{i=0}^n y_i e_i$. Nous avons alors les équivalences :

$$x - y \in F^\perp \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \langle e_k, x - y \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \langle e_k, x \rangle = y_k.$$

Il y a donc une unique solution, ce qui nous donne $E = F \oplus F^\perp$ et nous connaissons les coordonnées de y dans la base (e_0, \dots, e_n) , ce qui nous donne la deuxième phrase de l'énoncé.

Pour terminer, prenons $x \in F^{\perp\perp}$ et écrivons-le sous la forme précédente $x = y + z$, avec $(y, z) \in F \times F^\perp$. Puisque $x \in F^{\perp\perp}$, nous avons $x \perp z$, d'où :

$$0 = \langle x, z \rangle = \langle y + z, z \rangle = \|z\|^2.$$

Nous en déduisons que $z = 0$, et donc $x = y \in F$. Ainsi, $F^{\perp\perp} \subset F$ et l'inclusion inverse est toujours vraie. \square

Remarque. Si F est de dimension infinie, on a toujours $F \cap F^\perp = \{0\}$ mais on peut avoir $F \oplus F^\perp \subsetneq E$, ainsi que $F^{\perp\perp} \subsetneq F$. [DAN 358] construit un contre-exemple en considérant $F = \mathbb{R}[X]$, sous-espace de $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

En notant $\|\cdot\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire, nous constatons que $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$ et nous en déduisons, en utilisant le théorème de Weierstrass, que $F = \mathbb{R}[X]$ est dense dans $(E, \|\cdot\|_2)$. Il en résulte que $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0\}$, d'où $\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}[X]^\perp = \mathbb{R}[X] \subsetneq E$ et $\mathbb{R}[X]^{\perp\perp} = E \subsetneq \mathbb{R}[X]$.

Définition 9.4.4 Soit F un sous-espace d'un \mathbb{K} -e.v.n. E et $x \in E$. On dit que $x_0 \in F$ est une meilleure approximation de x dans F si :

$$\|x - x_0\| = d(x, F) := \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Dans le cas général, l'existence d'une telle meilleure approximation n'est pas assurée, comme on le constate en reprenant le contre-exemple de la remarque précédente. En effet, par densité de $F = \mathbb{R}[X]$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$, nous avons $d(f, F) = 0$ pour toute application $f \in E$. Ainsi, si f n'est pas polynomiale, il n'existe pas de meilleure approximation de f sur F .

L'unicité d'une meilleure approximation n'est pas assurée non plus, comme le lecteur pourra le constater sur le contre-exemple suivant [DAN 359].

Soit \mathcal{A} le \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension 2) des fonctions affines de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit D la droite engendrée par la fonction identité i et $\mathbf{1}$ la fonction constante et égale à 1. Nous avons donc l'égalité :

$$d(\mathbf{1}, D) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \|\mathbf{1} - ai\|_\infty.$$

Nous remarquons d'abord que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\|\mathbf{1} - ai\|_\infty \geq |1 - ai(0)| = 1$, si bien que $d(\mathbf{1}, D) \geq 1$. En outre, pour $a = 0$, $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$ donc $d(\mathbf{1}, D) = 1$ et la fonction nulle est une meilleure approximation de $\mathbf{1}$ sur D . Mais ce n'est pas la seule car, pour tout $a \in [0, 1]$, en traçant le tableau de variation de $x \mapsto 1 - ax$ sur $[0, 1]$, nous constatons que $\|\mathbf{1} - ai\|_\infty = 1$, si bien que ai est une meilleure approximation de $\mathbf{1}$ sur D .

Proposition 9.4.5 *Soit F un sous-espace de dimension finie d'un \mathbb{K} -espace préhilbertien E , et p la projection orthogonale sur F . Alors, pour tout $x \in E$, $p(x)$ est l'unique meilleure approximation de x dans F et l'on a :*

$$d(x, F)^2 = \|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2.$$

Démonstration: Soit $x \in E$ arbitraire fixé.

Nous avons $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$ donc, pour tout $y \in F$,

$$x - p(x) \perp p(x) - y.$$

Le théorème de Pythagore nous donne alors :

$$\|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2, \quad (9.3)$$

d'où $\|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$ avec égalité si, et seulement si, $y = p(x)$.

En prenant $y = 0$ dans (9.3), nous obtenons la dernière égalité de l'énoncé. \square

Remarque. Si (e_0, \dots, e_n) est une base orthonormée de F , la Proposition 9.4.3 nous donne $p(x) = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k$, d'où

$$\|p(x)\|^2 = \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2 \quad (9.4)$$

et

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2. \quad (9.5)$$

9.5 Inégalité de Bessel et égalité de Parseval

Dans tout ce paragraphe, sauf mention explicite, nous supposons que E est un \mathbb{K} -espace préhilbertien de dimension infinie. En procédant par récurrence, nous pouvons construire une famille libre dénombrable $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E ; nous en déduisons l'existence d'une famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Théorème 9.5.1 (Inégalité de Bessel) *Pour tout $x \in E$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2$ est une série convergente et sa somme est majorée par $\|x\|^2$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $F_n := \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n)$. D'après l'égalité (9.5), nous avons :

$$0 \leq d(x, F_n)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2,$$

d'où $\sum_{k=0}^n |\langle e_k, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Comme l'entier $n \in \mathbb{N}$ est arbitraire, nous obtenons la convergence de la série de l'énoncé et la majoration de sa somme. \square

Corollaire 9.5.2 (Lemme de Riemann-Lebesgue) *Pour tout $x \in E$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle e_n, x \rangle = 0.$$

Définition 9.5.3 *On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ est totale dans un espace vectoriel normé E si $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ est dense dans E .*

Exemple. D'après le théorème de Weierstrass, la suite des fonctions monômes $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans $(C^0([0, 1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

Proposition 9.5.4 *Supposons qu'il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormée et totale dans le \mathbb{K} -espace préhilbertien E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons p_n la projection orthogonale sur le sous-espace $F_n := \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n)$. Alors,*

$$\forall x \in E, \quad p_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x.$$

Démonstration: Soit $x \in E$ et $\epsilon > 0$ arbitraires fixés. Puisque la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{n_0}) \in \mathbb{K}^{n_0+1}, \quad \left\| x - \sum_{k=0}^{n_0} \lambda_k e_k \right\| < \epsilon.$$

Comme $p_n(x)$ est la meilleure approximation de x sur F_n , nous avons pour tout $n \geq n_0$:

$$\|x - p_n(x)\| \leq \underbrace{\left\| x - \sum_{k=0}^{n_0} \lambda_k e_k \right\|}_{\in F_n} < \epsilon,$$

d'où la conclusion. □

Remarque. Puisque (e_0, e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de F_n , nous avons d'après (9.2) : $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Ainsi, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \langle e_k, x \rangle e_k$ est convergente dans E et nous pouvons écrire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle e_k, x \rangle e_k = x.$$

Théorème 9.5.5 (Égalité de Parseval) *Supposons qu'il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormée et totale dans le \mathbb{K} -espace préhilbertien E . Alors, pour tout $x \in E$, la série positive $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2$ converge et sa somme vaut :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Démonstration: L'application $\|\cdot\|$ étant continue (car 1-lipschitzienne) de E dans \mathbb{R} , nous déduisons de la proposition précédente :

$$\forall x \in E, \quad \|p_n(x)\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x\|^2.$$

L'égalité (9.4) nous permet alors de conclure. □

Chapitre 10

Séries de Fourier

Historiquement, c'est pour résoudre *l'équation de la chaleur* que Fourier¹ a introduit en 1822 les séries qui portent son nom. Cette équation régit l'évolution de la température dans une barre de longueur finie, maintenue à une température constante à ses extrémités.

Pour fixer les idées, nous supposons la barre de longueur π et la température aux extrémités égale à 0. L'équation de la chaleur s'écrit alors, pour une application $u \in C^0([0, \pi] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que les dérivées partielles $\partial u / \partial t$, $\partial u / \partial x$ et $\partial^2 u / \partial x^2$ existent et sont continues sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+, & \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t); \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, & u(0, t) = u(\pi, t) = 0; \\ \forall x \in [0, \pi], & u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

où $f \in C^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$ est la condition initiale (température le long de la barre à l'instant 0). Fourier constata que si cette condition initiale s'écrivait sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx, \quad (10.1)$$

alors l'équation de la chaleur se résolvait comme suit :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \exp(-n^2 t) \sin nx.$$

D'où la question, qui allait conduire au vaste champ de *l'analyse harmonique* : quelles fonctions peut-on écrire sous la forme (10.1) ?

1. Joseph Fourier (1768-1830), mathématicien et physicien français.

Après l'étude de ce chapitre, le lecteur pourra se reporter au Problème 7.3 de [CMP 429] pour résoudre l'équation de la chaleur.

10.1 Polynôme et série trigonométriques

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous définissons comme suit l'application $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e_n(x) = e^{inx}. \quad (10.2)$$

Définition 10.1.1 On appelle polynôme trigonométrique toute application $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme :

$$P = \sum_{k=-n}^n c_k e_k, \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } (c_k)_{-n \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^{2n+1}.$$

Un polynôme trigonométrique est donc une application continue et 2π -périodique.

Définition 10.1.2 On appelle série trigonométrique toute série d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} de la forme :

$$c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n e_n + c_{-n} e_{-n}), \text{ avec } (c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}. \quad (10.3)$$

Nous la noterons² $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$.

Attention, la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ au point $x \in \mathbb{R}$ peut donc avoir lieu sans que la limite suivante existe :

$$\lim_{\substack{p \rightarrow -\infty \\ q \rightarrow +\infty}} \sum_{n=p}^q c_n e^{inx}.$$

Néanmoins, si la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ converge au point $x \in \mathbb{R}$, la « convention de Cauchy » veut que l'on note sa somme comme suit :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

2. On utilise aussi, par abus d'écriture, la notation $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

Remarque. En utilisant la formule de Moivre $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$, nous constatons que la série trigonométrique (10.3) s'écrit encore

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (10.4)$$

où l'on a posé :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}). \quad (10.5)$$

Proposition 10.1.3 *Si les séries positives $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{-n}|$ convergent, alors la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ converge normalement sur \mathbb{R} .*

Démonstration: L'inégalité triangulaire nous permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| \leq |c_n| + |c_{-n}|,$$

et ce majorant est le terme général d'une série convergente par somme de séries convergentes. \square

Proposition 10.1.4 *Si les deux suites $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont réelles et tendent vers 0 en décroissant, alors la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} - (2\pi\mathbb{Z})$ et uniformément sur toute intervalle de la forme $2k\pi + [\alpha, 2\pi - \alpha]$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 < \alpha < \pi$.*

Démonstration: Nous allons établir dans un premier temps la convergence uniforme de la série d'applications $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_n$ sur $2k\pi + [\alpha, 2\pi - \alpha]$. Il suffit d'appliquer le *critère d'Abel uniforme* (cf. Théorème 7.6.5, page 153) avec $f_n = e_n$ et $g_n \equiv c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, l'égalité

$$\sum_{k=0}^n f_k(x) = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} e^{-ix/2}$$

entraîne la majoration suivante, pour tout $x \in 2k\pi + [\alpha, 2\pi - \alpha]$:

$$\left| \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq \frac{2}{|e^{-ix/2} - e^{ix/2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin \frac{\alpha}{2}|},$$

ce qui nous permet de conclure.

Nous reprenons alors la même démonstration avec $f_n = e_{-n}$ et $g_n \equiv c_{-n}$ pour obtenir un résultat similaire avec la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_{-n} e_{-n}$, ce qui permet de conclure à la convergence uniforme annoncée.

Enfin, la convergence simple de la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ sur l'intervalle $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, pour tout $0 < \alpha < \pi$, nous donne sa convergence simple sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ puis, par 2π -périodicité, sur $\mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$. \square

Nous terminons cette section en citant sans démonstration un théorème (hors programme) qui établit une condition nécessaire à la convergence d'une série trigonométrique.

Théorème 10.1.5 (Cantor-Lebesgue) *Si la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge simplement sur \mathbb{R} , alors :*

$$c_n \xrightarrow[n \rightarrow \pm\infty]{} 0.$$

10.2 Coefficients et série de Fourier

Définition 10.2.1 *Soit $f \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application 2π -périodique. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes*

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On appelle série de Fourier associée à f la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$, où les applications $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, sont définies par (10.2).

Cette définition des coefficients et de la série de Fourier est naturelle à cause des deux résultats suivants.

Lemme 10.2.2 *Soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers une application f . Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = c_n(f)$.*

Démonstration: Grâce à l'hypothèse de convergence uniforme, nous pouvons écrire, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_p(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ipt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_0 e^{-ipt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) e^{-ipt} dt \\ &= c_p, \end{aligned}$$

cette dernière ligne résultant de l'égalité :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{Z}^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-ipt} dt = \delta_{n,p}, \quad (10.6)$$

où $\delta_{n,p}$ est le symbole de Kronecker. \square

Nous citons le second résultat sans démonstration en renvoyant le lecteur intéressé à la 2e épreuve du concours d'agrégation interne 2004, partie II.

Proposition 10.2.3 *Soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique qui converge simplement sur \mathbb{R} vers une application f continue.*

Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = c_n(f)$.

Remarque. La série de Fourier associée à f s'écrit encore :

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx),$$

avec, selon la formule (10.5),

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

Tous les résultats énoncés dans la suite de ce chapitre avec les coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ ont donc des analogues avec les coefficients $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$, que nous donnerons parfois brièvement. Nous renvoyons le lecteur à [GOU 256 sqq.] pour les détails.

Remarques.

1. Si la série trigonométrique converge simplement mais pas uniformément sur \mathbb{R} , il n'est pas garanti que sa somme S soit continue par morceaux donc que l'on puisse lui associer une série de Fourier.
2. Le critère d'Abel nous permet de prouver la convergence simple sur \mathbb{R} de la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(nx)/\sqrt{n}$ vers une somme S impaire. Si cette convergence était uniforme, nous aurions $S \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $b_n(S) = 1/\sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui impliquerait, d'après l'*inégalité de Bessel* (que nous prouverons ci-dessous) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2(S) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S^2 < +\infty.$$

Ceci est absurde puisque la série harmonique diverge. Nous avons donc démontré par l'absurde que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(nx)/\sqrt{n}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

10.3 Le théorème de convergence de Dirichlet

Définition et proposition 10.3.1 On appelle noyau de Dirichlet la suite de polynômes trigonométriques $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme trigonométrique D_n est une fonction paire, à valeurs réelles, et telle que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n = 1$. En outre, nous avons l'égalité :

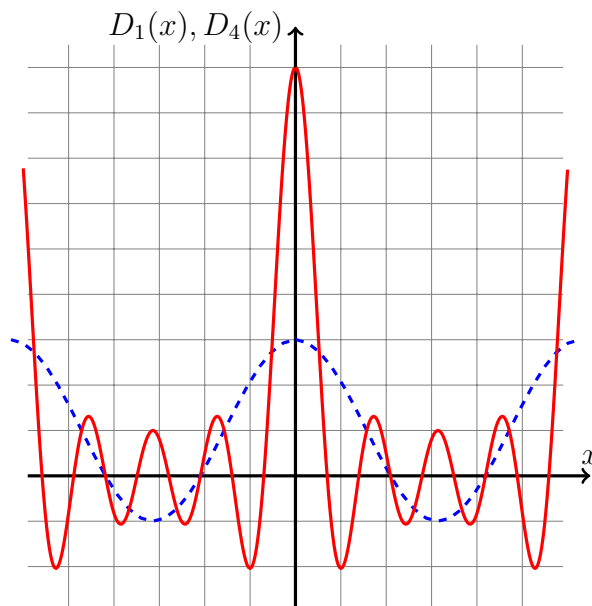
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z}), \quad D_n(x) = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Démonstration: La première phrase est immédiate.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R} - (2\pi\mathbb{Z})$, nous calculons, en utilisant la somme d'une série géométrique :

$$D_n(x) = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x/2} e^{i(2n+1)x/2} - e^{-i(2n+1)x/2}}{e^{ix/2} e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$

d'où l'égalité annoncée. □



Théorème 10.3.2 (Jordan-Dirichlet) Soit $f \in C_M^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application 2π -périodique. Alors, la série de Fourier associée à f converge simplement sur \mathbb{R} vers la régularisée de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = \tilde{f}(x) := \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Démonstration: Si nous remplaçons l'application f par sa régularisée $\tilde{f} \in \mathcal{D}$, cela ne la modifie sur $[0, 2\pi]$ qu'en un nombre fini de points et donc cela laisse les coefficients de Fourier inchangés. Par conséquent, il suffit de prouver que si $f \in \mathcal{D} \cap C_M^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors la série de Fourier associée à f converge simplement vers f sur \mathbb{R} .

En considérant la fonction $f_{x_0} = f(x_0 + \cdot)$, nous calculons, à l'aide du changement de variable $u = x_0 + t$,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f_{x_0}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(u) e^{-in(u-x_0)} du \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{inx_0} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(u) e^{-inu} du. \end{aligned}$$

Ce dernier intégrande étant 2π -périodique, nous en déduisons l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f_{x_0}) = c_n(f) e^{inx_0}.$$

Par conséquent, si nous établissons l'égalité annoncée au point $x = 0$, *i.e.*

$$\forall f \in \mathcal{D} \cap C_M^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) = f(0),$$

alors cela suffit pour l'obtenir en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitraire.

Nous posons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n := \sum_{k=-n}^n c_k(f)$, $u_n := s_n - f(0)$ et nous cherchons à montrer que $u_n \rightarrow 0$.

Un calcul simple utilisant les propriétés de D_n énoncées précédemment nous donne $2\pi u_n = \int_0^\pi (f(t) + f(-t) - 2f(0)) D_n(t) dt$, d'où, avec un changement de variable élémentaire :

$$2\pi u_n = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{f(2t) + f(-2t) - f(0+) - f(0-)}{\sin t} \sin(2n+1)t dt.$$

Comme $f \in C_M^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, en utilisant l'équivalent $\sin t \sim t$ au voisinage de 0, le lecteur établira facilement la convergence suivante :

$$\frac{f(2t) + f(-2t) - f(0+) - f(0-)}{\sin t} \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 2(f'(0+) - f'(0-)).$$

Avec un instant de réflexion, nous en déduisons qu'il est possible de définir une application $g \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π -périodique, vérifiant :

$$\forall t \in]0, 2\pi[, \quad g(t) = \frac{f(2t) + f(-2t) - f(0+) - f(0-)}{\sin t} \mathbf{1}_{]0, \frac{\pi}{2}[}(t).$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue nous donne alors $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(g) = 0$, ce qui nous permet de conclure puisque :

$$u_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(2n+1)t \, dt = i(c_{2n+1}(g) - c_{-(2n+1)}(g)).$$

□

Sous les hypothèses du théorème de Jordan-Dirichlet, si f est en outre continue sur \mathbb{R} , alors $\tilde{f} = f$ et la série de Fourier associée à f converge simplement sur \mathbb{R} vers f . En fait, nous avons dans ce cas un résultat bien meilleur.

Théorème 10.3.3 (de convergence normale) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C_M^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application 2π -périodique.

Alors, la série de Fourier associée à f converge normalement vers f sur \mathbb{R} .

Pour démontrer ce théorème, nous établissons d'abord un lemme.

Lemme 10.3.4 Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C_M^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application 2π -périodique. Nous définissons l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\varphi(t) := \begin{cases} f'(t) & \text{si } f \text{ est dérivable au point } t, \\ \frac{f'(t-) + f'(t+)}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{D}$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\varphi) = inc_n(f)$.

Démonstration: Il est facile de vérifier que $\varphi \in \mathcal{D}$. Si $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, une intégration par parties nous donne :

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} \, dt = \left[\frac{f(t) e^{-int}}{2\pi} \right]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt,$$

d'où $c_n(\varphi) = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le cas général, on applique la relation de Chasles le long d'une subdivision de $[0, 2\pi]$ adaptée à $f \in C_M^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et l'on utilise la continuité de l'application f ; le reste de la preuve est analogue. Le lecteur trouvera les détails dans [GOU 261]. □

Démonstration du théorème : En reprenant les notations du lemme, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad |c_n(f)| = \frac{1}{n} |c_n(\varphi)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n(\varphi)|^2 \right).$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{D}$, l'égalité de Parseval nous permet d'en déduire que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge. Nous concluons grâce à la Proposition 10.1.3. \square

Sous les hypothèses du théorème de Jordan-Dirichlet, si f n'est pas continue sur \mathbb{R} , il est impossible que la série de Fourier associée à f converge uniformément vers la régularisée \tilde{f} , puisque celle-ci n'est pas non plus continue sur \mathbb{R} . Ce défaut de convergence uniforme est flagrant quand on observe le *phénomène de Gibbs* (cf. [GOU 266-267]). Considérons par exemple le *signal carré impair* f défini sur $[-\pi, \pi[$ par

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{si } -\pi < t < 0, \\ 0 & \text{si } t = -\pi \text{ ou } t = 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } 0 < t < \pi, \end{cases}$$

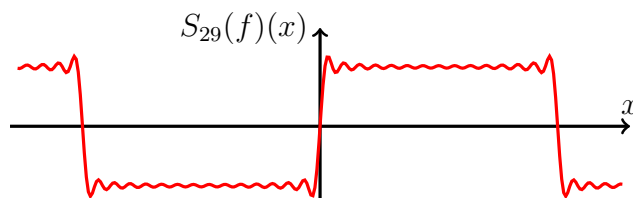
et prolongé à \mathbb{R} par 2π -périodicité. Il est facile de calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{2n+1}(f) = \frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{2n}(f) = 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle d'ordre $2n+1$ de la série de Fourier associée à f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_{2n+1}(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

On peut montrer qu'il se produit au voisinage de 0 une « oscillation » de la fonction $S_{2n+1}(f)$ d'amplitude incompressible, aussi grande que soit la valeur de l'entier n .



Autres références sur le phénomène de Gibbs : *Oraux X-ENS Analyse 2*, exercice 4.25. *Épreuve orale d'exemples et d'exercices* par Ketrane et Elineau chez Dunod, développement 20.

Remarque. L'hypothèse $f \in C_M^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est importante pour obtenir la convergence simple de la série de Fourier associée à f vers la régularisée \tilde{f} . Le mathématicien allemand Paul Du Bois-Reymond a construit en 1873 une application 2π -périodique $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont la série de Fourier diverge en 0. Le lecteur en trouvera un autre exemple, construit ultérieurement par le mathématicien hongrois Lipot Fejér, dans [GOU 264-265].

Exercice : Développement du sinus en produit infini [GOU 262].

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$; nous définissons l'application 2π -périodique $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi[$.

En développant f_α en série de Fourier, montrer l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z}), \quad \cotant = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

En intégrant l'égalité précédente entre 0 et $x \in]0, \pi[$, établir la formule :

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad \sin t = t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Ce développement du sinus en produit infini et la formule d'Euler-Gauss (Proposition 3.3.3, page 83) nous permettent d'établir le résultat suivant.

Proposition 10.3.5 (Formule des compléments) *La fonction Γ d'Euler vérifie l'égalité suivante :*

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}.$$

10.4 Le théorème de Fejér

Nous reprenons ici la notation $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour le noyau de Dirichlet introduit dans la section précédente.

Définition et proposition 10.4.1 *On appelle noyau de Fejér la suite de polynômes trigonométriques $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^$, F_n est une fonction paire telle que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n = 1$.*

En outre, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z}), \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \geq 0.$$

Démonstration: La première phrase se vérifie immédiatement.

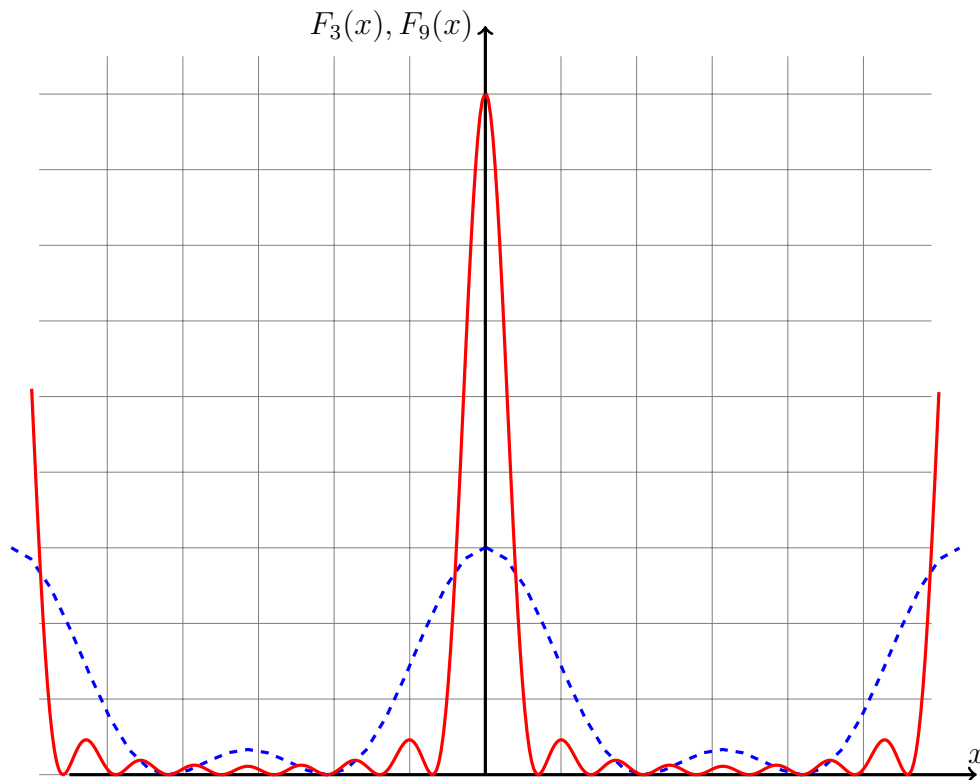
En utilisant la Proposition 10.3.1, nous calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{n \sin\frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} \right). \quad (10.7)$$

Or la somme entre parenthèses s'écrit encore :

$$e^{i\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{i\frac{nx}{2}} e^{i\frac{nx}{2}} - e^{-i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

En passant à la partie imaginaire puis en revenant à (10.7), nous obtenons le résultat annoncé. □



Soit $f \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application 2π -périodique. Nous reprenons la notation $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ pour la suite des sommes partielles associées à la série de Fourier de f , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}.$$

Définition 10.4.2 Soit $f \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application 2π -périodique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle somme de Fejér d'ordre n associée à f le polynôme trigonométrique $\sigma_n(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par :

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f).$$

La somme de Fejér d'ordre n est donc la *moyenne de Cesàro* des n premières sommes partielles de Fourier.

Théorème 10.4.3 (Fejér) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application 2π -périodique. Alors, la suite des sommes de Fejér $(\sigma_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

Démonstration: Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) F_n(x-t) dt.$$

Grâce au changement de variable $s = x - t$ et à la 2π -périodicité de f et F_n , nous en déduisons :

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^x f(x-t) F_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt.$$

Comme $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n = 1$, nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] F_n(t) dt.$$

Comme f est continue et 2π -périodique, on montre facilement grâce au théorème de Heine que f est uniformément continue sur \mathbb{R} . Soit $\epsilon > 0$ arbitraire ;

il existe donc $\delta \in]0, \pi[$ tel que $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. De l'égalité précédente, nous déduisons :

$$2\pi|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)| \underbrace{F_n(t)}_{\geq 0} dt + \frac{\epsilon}{2} \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} F_n}_{\leq \int_{-\pi}^{\pi} F_n = 2\pi} + \int_{\delta}^{\pi} \dots$$

Nous allons majorer cette dernière intégrale, la 1^{re} se traitant de même.

$$\int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| F_n(t) dt \leq 2\|f\|_{\infty} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \leq \frac{2\pi\|f\|_{\infty}}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Revenant à l'inégalité précédente, nous en déduisons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\|f\|_{\infty}}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Finalement, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon$, ce qui nous permet de conclure puisque $\epsilon > 0$ était arbitraire. \square

Remarque. On peut montrer plus généralement que si $f \in \mathcal{D}$, alors la suite d'applications $(\sigma_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers f , et uniformément sur tout intervalle sur lequel f est continue [DAN 386].

Nous déduisons du théorème de Fejér le résultat suivant, qui est un analogue du théorème de Weierstrass dans le cas des fonctions continues périodiques.

Corollaire 10.4.4 *Toute application 2π -périodique $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Application : Valeur moyenne d'une fonction périodique continue

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ et $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application 2π -périodique. Alors, on a la convergence suivante :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f.$$

L'idée est de montrer cette propriété quand f est un monôme trigonométrique, puis un polynôme trigonométrique. On passe ensuite au cas général en utilisant le corollaire précédent [DAN 395-396].

Une conséquence importante du théorème de Fejér est la suivante.

Corollaire 10.4.5 *Dans le \mathbb{C} -espace préhilbertien de Dirichlet \mathcal{D} , la suite orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{inx}$, est totale.*

Démonstration: Soit $f \in \mathcal{D}$. Si f est continue, le théorème de Fejér nous dit qu'il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques telle que $\|g_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. Comme nous avons l'inégalité $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$, nous en déduisons que $\|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

Si f n'est pas continue, pour tout $\epsilon > 0$, on peut construire (cf. [DAN 380]) une application \tilde{f} continue telle que $\|f - \tilde{f}\|_2 < \epsilon/2$. Or, nous venons de voir qu'il existe un polynôme trigonométrique g tel que $\|g - \tilde{f}\|_2 < \epsilon/2$. Grâce à l'inégalité triangulaire, nous en déduisons $\|g - f\|_2 < \epsilon$.

Nous avons ainsi prouvé la densité du sous-espace $\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des polynômes trigonométriques dans \mathcal{D} . \square

10.5 Approximation en moyenne quadratique

Nous allons maintenant appliquer les résultats généraux que nous avons rappelés dans le chapitre précédent au cas particulier du \mathbb{C} -espace préhilbertien \mathcal{D} . Nous noterons $\|\cdot\|_2$ la norme hermitienne associée au produit scalaire sur \mathcal{D} , donnée par :

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt},$$

et $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la famille orthonormale dans \mathcal{D} définie par $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{inx}$. Considérons la suite $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles associées à la série de Fourier de f , c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}.$$

Nous remarquons que $S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$, avec :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \langle e_k, f \rangle.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons le sous-espace de \mathcal{D} défini par $F_n := \text{Vect}(e_k)_{-n \leq k \leq n}$. Par analogie avec la notion de degré d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, un élément de F_n est appelé polynôme trigonométrique de degré $\leq n$.

Proposition 10.5.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $F_n \oplus F_n^\perp = \mathcal{D}$ et la projection orthogonale p_n sur F_n vérifie :*

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad p_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k = S_n(f).$$

Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{D}$, $S_n(f)$ est l'unique meilleure approximation de f dans le sous-espace F_n , et on a les égalités :

$$\inf_{g \in F_n} \|f - g\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2.$$

Proposition 10.5.2 (Inégalité de Bessel) *Pour toute application $f \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π -périodique, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge et :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2$$

Démonstration: Considérons la régularisée $\tilde{f} \in \mathcal{D}$ associée à f selon la formule (9.1) page 169. D'après ce que nous avons établi précédemment, l'inégalité de Bessel est vérifiée pour \tilde{f} .

Or, f et \tilde{f} ne diffèrent sur $[0, 2\pi]$ qu'en un nombre fini de points, nous avons $c_n(\tilde{f}) = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ainsi que :

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{f}|^2 = \int_0^{2\pi} |f|^2,$$

ce qui nous permet de conclure. \square

Corollaire 10.5.3 (Lemme de Riemann-Lebesgue) *Pour toute application $f \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π -périodique,*

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(f) = 0.$$

Grâce au *théorème de Fejér*, nous avons établi le Corollaire 10.4.5 énonçant que la suite orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est totale dans le \mathbb{C} -espace préhilbertien de Dirichlet \mathcal{D} . Nous en déduisons :

Théorème 10.5.4 (Égalité de Parseval) *Soit $f \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application 2π -périodique. Alors, nous avons la convergence :*

$$\|f - S_n(f)\|_2 \rightarrow 0.$$

Ceci implique notamment que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge et a pour somme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2. \quad (10.8)$$

Remarque. L'égalité de Parseval s'écrit encore :

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2. \quad (10.9)$$

Exercice : Soit $a \in \mathbb{C}$. Notons f la fonction périodique de période 2π telle que, pour tout $x \in [0, 2\pi[$, on ait $f(x) = e^{ax}$.

1. Notons $b = \operatorname{Re} a$. Montrer que si $b = 0$, alors on a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = 1$ et

$$\text{que si } b \neq 0, \text{ alors on a } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{e^{4\pi b} - 1}{4\pi b}.$$

2. Calculer les coefficients de Fourier de f .
3. Montrer que pour tout nombre réel non nul a on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right) \left(\frac{e^{2a\pi} + 1}{e^{2a\pi} - 1}\right).$$

4. Montrer que pour tout nombre réel c non entier on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n - c)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi c}\right)^2.$$

Solution :

1. La fonction f est périodique de période 2π et continue par morceaux. L'identité de Parseval donne $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$, d'où le résultat puisque $|f(t)| = e^{bt}$.
2. On a $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(a-ik)t} dt$ donc $c_k(f) = 1$ si $a = ik$ et $c_k(f) = \frac{e^{2\pi(a-ik)} - 1}{2\pi(a-ik)} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{2\pi(a-ik)}$ sinon.
3. Pour a réel non nul, il vient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{2\pi a} - 1)^2}{4\pi^2(a^2 + n^2)} = \frac{e^{4\pi a} - 1}{4\pi a}.$$

Écrivant $e^{4\pi a} - 1 = (e^{2\pi a} - 1)(e^{2\pi a} + 1)$ et simplifiant on trouve le résultat escompté.

4. Posant $a = ic$, il vient $c_n(f) = \frac{e^{i\pi c} \sin \pi c}{\pi(c-n)}$, donc $1 = \frac{\sin^2 \pi c}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(c-n)^2}$.

Exercice : Polynômes de Bernoulli. [SKA 192]. On considère la suite de fonctions polynomiales $(P_k)_{k \geq 1}$ définies sur $[0, 2\pi]$ par $P_1(t) = \pi - t$ et, pour tout $k \geq 1$, $P'_{k+1} = P_k$ et $\int_0^{2\pi} P_k(t) dt = 0$.

1. Montrer que :

$$\forall k \geq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad P_k(2\pi - t) = (-1)^k P_k(t).$$

2. Montrer que :

$$\forall k \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} P_k(t) e^{-int} dt = (in)^{-k}.$$

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P_{2k+1}(\pi) = 0$ et, pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_k(t)^2 dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k} = (-1)^k P_{2k}(0).$$

4. En déduire les égalités $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Solution (abrégée) :

1. Remarquons d'abord que la relation $P'_{k+1} = P_k$ et $\int_0^{2\pi} P_{k+1}(t) dt = 0$ déterminent entièrement P_{k+1} .

Si P_k vérifie $P_k(2\pi - t) = (-1)^k P_k(t)$, alors le polynôme Q défini par $Q(t) = (-1)^{k+1} P_{k+1}(2\pi - t)$ vérifie $Q' = P_k$ et $\int_0^{2\pi} Q(t) dt = 0$, donc $Q = P_{k+1}$.

2. Par intégration par parties, on trouve :

$$\int_0^{2\pi} P_k(t) e^{-int} dt = \left[P_k(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} P'_k(t) \frac{e^{-int}}{-in} dt$$

Il vient $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} P_1(t) e^{-int} dt = (in)^{-1}$, puis, par récurrence, l'égalité demandée.

3. D'après la première question, nous avons $(-1)^{2k+1} P_{2k+1}(\pi) = P_{2k+1}(\pi)$, d'où $P_{2k+1}(\pi) = 0$.

D'après l'identité de Parseval, on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_k(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(P_k)|^2$. Or $c_0(P_k) = 0$ et $|c_n(P_k)|^2 = n^{-2k}$ pour $n \neq 0$.

D'après le théorème de Dirichlet,

$$P_{2k}(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(P_{2k}) = \sum_{n \neq 0} (in)^{-2k} = (-1)^k 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k}.$$

On a $P_2(t) = -\frac{(t-\pi)^2}{2} + c$; or $\int_0^{2\pi} \left(-\frac{(t-\pi)^2}{2} + c\right) dt = 2\pi c - \left[\frac{(t-\pi)^3}{6}\right]_0^{2\pi} = 2\pi c - \frac{\pi^3}{3}$. Il vient $P_2(t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{(t-\pi)^2}{2}$.

On en déduit $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = -\frac{P_2(0)}{2} = \frac{\pi^2}{6}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-4} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} P_2(t)^2 dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^2(t-\pi)^2}{6} + \frac{(t-\pi)^4}{4}\right) dt \\ &= \frac{\pi^4}{72} - \left[\frac{\pi}{4} \frac{(t-\pi)^3}{18}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{4\pi} \frac{(t-\pi)^5}{20}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi^4}{72} - \frac{\pi^4}{36} + \frac{\pi^4}{40} = \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned}$$

Le lecteur trouvera un exercice analogue dans [DAN 392-395].

Exercice : Inégalité de Wirtinger Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application 2π -périodique telle que $\int_0^{2\pi} f = 0$. Établir l'inégalité :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

Solution : [GOU 264].

Le même genre d'idée est utilisée pour prouver *l'inégalité isopérimétrique* : voir *Oraux X-ENS, tome 4*.

ISBN 978-2-91-635238-1



9 782916 352381