Compléments sur la notion d'indépendance

Probabilités approfondies

19 septembre 2022

Dans ce texte, je reviens sur une partie du chapitre introductif sur laquelle je suis passé un peu vite en cours alors que c'est une partie un peu délicate, et peut-être plus nouvelle pour beaucoup d'entre vous qu'un certain nombre d'autres choses sur lesquelles j'ai passé plus de temps. Il s'agit de la définition de la notion d'indépendance et de ses premières propriétés.

Dans tout ce texte, on travaille sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1 Définition de l'indépendance

Commençons par donner les définitions de l'indépendance de tribus, de variables aléatoires, et d'événements. Nous nous intéressons pour l'instant à des familles finies.

Définition 1 *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_n$ des sous-tribus de $\mathscr{F}$. On dit que $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_n$ sont* indépendantes *relativement à $\mathbb{P}$ si pour tous événements $G_1 \in \mathscr{G}_1, \ldots, G_n \in \mathscr{G}_n$, on a l'égalité $\mathbb{P}(G_1 \cap \ldots \cap G_n) = \mathbb{P}(G_1) \ldots \mathbb{P}(G_n)$.*

Définition 2 *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont* indépendantes *relativement à $\mathbb{P}$ si les tribus $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)$ sont indépendantes au sens de la définition 1.*

Soulignons que cette définition a un sens même si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont à valeurs dans des espaces mesurables distincts.

Définition 3 *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ des évélements. On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont* indépendants *relativement à $\mathbb{P}$ si les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$ sont indépendantes au sens de la définition 2.*

On généralise la notion d'indépendance à des familles infinies de sous-tribus, de variables aléatoires, ou d'événements, de la manière la plus simple possible.

Définition 4 *On dit qu'une famille quelconque de sous-tribus (resp. de variables aléatoires, resp. d'événements) est indépendante si chacune de ses sous-familles finies est indépendante au sens de la définition 1 (resp. de la définition 2, resp. de la définition 3).*

Dans la suite de ce texte, on s'intéresse à des familles finies.

Exercice 1 *La définition 4 appliquée à une famille finie de sous-tribus donne-t-elle la même définition de son indépendance que la définition 1 ?*

2 Événements indépendants

Nous allons donner plusieurs caractérisations de l'indépendance de n événements. Examinons d'abord ce que dit la définition. Pour la comprendre, il nous faut comprendre ce qu'est la tribu engendrée par l'indicatrice d'un événement.

Exercice 2 *Soit $A \in \mathscr{F}$ un événement. Si $A = \varnothing$ ou $A = \Omega$, alors $\sigma(\mathbb{1}_A) = \{\varnothing, \Omega\}$. Sinon, $\sigma(\mathbb{1}_A) = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$.*

Par définition, des événements $A_1, \ldots, A_n$ de la tribu $\mathscr{F}$ sont donc indépendants si pour tous $G_1 \in \{\varnothing, A_1, A_1^c, \Omega\}, \ldots, G_n \in \{\varnothing, A_n, A_n^c, \Omega\}$, on a $\mathbb{P}(G_1 \cap \ldots \cap G_n) = \mathbb{P}(G_1) \ldots \mathbb{P}(G_n)$. Cela fait 4^n égalités à vérifier. Un certain nombre d'entre elles sont automatiquement vérifiées, par exemple celles où l'un des G_i est vide, celle où tous les G_i sont égaux à Ω, et quelques autres encore.

Proposition 1 *Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ des évenements. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants (au sens de la définition 3).

2. Pour tous $B_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \ldots, B_n \in \{A_n, A_n^c\}$, on a $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \ldots \mathbb{P}(B_n)$.

Si cette proposition est vraie (ce que nous allons démontrer), elle ramène la vérification de l'indépendance de n événements à la vérification de 2^n égalités.

Démonstration de la proposition 1. Supposons la première assertion vérifiée et donnons-nous $B_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \ldots, B_n \in \{A_n, A_n^c\}$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'événement B_i appartient à la tribu $\sigma(\mathbb{1}_{A_i})$, si bien que l'égalité $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \ldots \mathbb{P}(B_n)$ a lieu par définition de l'indépendance de $A_1, \ldots, A_n$. Ainsi, la seconde assertion est vérifiée.

Supposons réciproquement que la seconde assertion soit vérifiée et montrons que la première l'est. Pour cela, donnons-nous des événements $G_1 \in \{\varnothing, A_1, A_1^c, \Omega\}, \ldots, G_n \in \{\varnothing, A_n, A_n^c, \Omega\}$ et montrons qu'on a l'égalité $\mathbb{P}(G_1 \cap \ldots \cap G_n) = \mathbb{P}(G_1) \ldots \mathbb{P}(G_n)$.

Si l'un au moins des événements $G_1, \ldots, G_n$ est vide, alors l'égalité est vraie. Supposons désormais qu'aucun d'entre eux n'est vide. Si aucun d'entre eux n'est égal à Ω, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $G_i \in \{A_i, A_i^c\}$, et l'égalité découle directement de notre hypothèse que la seconde assertion est vérifiée.

Il reste à traiter le cas où aucun des événements $G_1, \ldots, G_n$ n'est vide, et où au moins l'un d'entre eux est égal à Ω. Quitte à changer la numérotation des événements $A_1, \ldots, A_n$, nous pouvons supposer que, pour un certain $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, nous avons

$$G_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \ldots, G_k \in \{A_k, A_k^c\}, \text{ et } G_{k+1} = \ldots = G_n = \Omega.$$

Nous allons calculer $\mathbb{P}(G_1 \cap \ldots \cap G_n)$ en écrivant, pour chaque $i \in \{k+1, \ldots, n\}$, l'événement Ω sous la forme $A_i \cup A_i^c$, puis utiliser la distributivité de l'union par rapport à l'intersection et enfin l'additivité de la mesure. Cela nous donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_1 \cap \ldots \cap G_n) &= \mathbb{P}\big(G_1 \cap \ldots \cap G_k \cap (A_{k+1} \cup A_{k+1}^c) \cap \ldots \cap (A_n \cup A_n^c)\big) \\
&= \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{H_{k+1} \in \{A_{k+1}, A_{k+1}^c\}, \ldots, H_n \in \{A_n, A_n^c\}} G_1 \cap \ldots \cap G_k \cap H_{k+1} \cap \ldots \cap H_n\Bigg) \\
&= \sum_{H_{k+1} \in \{A_{k+1}, A_{k+1}^c\}, \ldots, H_n \in \{A_n, A_n^c\}} \mathbb{P}(G_1 \cap \ldots \cap G_k \cap H_{k+1} \cap \ldots \cap H_n).
\end{aligned}$$

L'hypothèse que la seconde assertion est vérifiée nous permet de calculer chacune des probabilités qui apparaît dans la dernière somme. Nous trouvons

$$\mathbb{P}(G_1 \cap \ldots \cap G_n) = \sum_{H_{k+1} \in \{A_{k+1}, A_{k+1}^c\}, \ldots, H_n \in \{A_n, A_n^c\}} \mathbb{P}(G_1) \ldots \mathbb{P}(G_k) \mathbb{P}(H_{k+1}) \ldots \mathbb{P}(H_n).$$

Les k premiers facteurs de chaque terme de la somme se factorisent, et il reste une somme qui se calcule facilement, à savoir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_1 \cap \ldots \cap G_n) &= \mathbb{P}(G_1) \ldots \mathbb{P}(G_k) \sum_{H_{k+1} \in \{A_{k+1}, A_{k+1}^c\}, \ldots, H_n \in \{A_n, A_n^c\}} \mathbb{P}(H_{k+1}) \ldots \mathbb{P}(H_n) \\
&= \mathbb{P}(G_1) \ldots \mathbb{P}(G_k) \big(\mathbb{P}(A_{k+1}) + \mathbb{P}(A_{k+1}^c)\big) \ldots \big(\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_n^c)\big) \\
&= \mathbb{P}(G_1) \ldots \mathbb{P}(G_k).
\end{aligned}$$

Enfin, puisque $G_{k+1} = \ldots = G_n = \Omega$, cette dernière quantité n'est autre que $\mathbb{P}(G_1) \ldots \mathbb{P}(G_n)$, et l'égalité souhaitée est vérifiée. □

On peut donner un autre ensemble de 2^n égalités (en fait un peu moins) qui est équivalent à l'indépendance de n événements : c'est ce que fait la proposition suivante.

Proposition 2 *Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ des évenements. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants.

2. Pour tout entier $k \geqslant 2$ et tous entiers $i_1, \ldots, i_k$ tels que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, on a $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k})$.

Démonstration de la proposition 2. Supposons la première assertion vérifiée. Donnons-nous $k \geqslant 2$ et $i_1 < \ldots < i_k$ entre 1 et n. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, posons $G_j = A_{i_\ell}$ si $j = i_\ell$, et $G_j = \Omega$ si j n'appartient pas à $\{i_1, \ldots, i_k\}$. Alors l'égalité $\mathbb{P}(G_1 \cap \ldots \cap G_n) = \mathbb{P}(G_1) \ldots \mathbb{P}(G_n)$, qui a lieu par hypothèse, est exactement l'égalité $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k})$. Ainsi, la deuxième assertion est vérifiée.

Supposons maintenant la deuxième assertion vérifiée. Nous allons montrer que la deuxième assertion de la proposition 1 est vérifiée, si bien que $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants.

Considérons donc $B_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \ldots, B_n \in \{A_n, A_n^c\}$. Comme lors de la démonstration de la proposition précédente, nous ne perdons pas de généralité, quitte à changer la numérotation des événements, à supposer qu'il existe $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $B_i = A_i$ pour $i \leqslant k$ et $B_i = A_i^c$ pour $i > k$.

Pour calculer la probabilité de l'intersection de $B_1, \ldots, B_n$, nous allons l'écrire sous la forme d'une espérance :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_1 \cap \ldots \cap B_n}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_1} \ldots \mathbb{1}_{B_n}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_k} \mathbb{1}_{A_{k+1}^c} \ldots \mathbb{1}_{A_n^c}].$$

Exprimons maintenant les indicatrices des complémentaires en fonction des indicatrices des ensembles :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_k} (1 - \mathbb{1}_{A_{k+1}}) \ldots (1 - \mathbb{1}_{A_n})]. \tag{1}$$

Développons maintenant le produit dans l'espérance. Nous trouvons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) &= \sum_{J \subseteq \{k+1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|}\, \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_k} \prod_{i \in J} \mathbb{1}_{A_j}\Big] \\ &= \sum_{J \subseteq \{k+1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|}\, \mathbb{P}\Big(A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap \bigcap_{j \in J} A_j\Big)\end{aligned}$$

L'hypothèse nous permet de calculer chacun des termes de cette somme, pour trouver

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \sum_{J \subseteq \{k+1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|}\, \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_k) \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

En reprenant, mais à l'envers, le calcul où nous avons développé le terme de droite de (1), nous trouvons

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_k)\big(1 - \mathbb{P}(A_{k+1})\big) \ldots \big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big)$$

et nous aboutissons finalement à l'égalité

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1}^c) \ldots \mathbb{P}(A_n^c) = \mathbb{P}(B_1) \ldots \mathbb{P}(B_n).$$

La deuxième assertion de la proposition 1 est donc bien vérifiée, et les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont bien indépendants. □

Par exemple, trois événements A, B, C sont indépendants si et seulement si les quatre égalités

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ &\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ &\mathbb{P}(C \cap A) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A)\end{aligned}$$

sont vérifiées.

Exercice 3 *Montrer qu'il n'est pas possible d'enlever une des quatre conditions ci-dessus. Autrement dit, pour chacune de ces quatre conditions, il existe trois événements qui ne sont pas indépendants mais qui vérifient les trois autres conditions.*

En particulier, la condition $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ ne suffit pas à assurer que les événements A, B, C sont indépendants.

Les assertions "A, B, C sont indépendants" et "A, B, C sont deux à deux indépendants" ne sont pas non plus équivalentes.

3 Variables aléatoires indépendantes

Convenons de noter $P_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ la loi d'une variable aléatoire X.

Proposition 3 *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires, à valeurs respectivements dans des espaces mesurables $(E_1, \mathscr{E}_1), \ldots, (E_n, \mathscr{E}_n)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.*
2. *Sur l'espace $(E_1 \times \ldots \times E_n, \mathscr{E}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{E}_n)$, on a l'égalité $P_{(X_1,\ldots,X_n)} = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n}$.*

Démonstration. Supposons les variables aléatoires indépendantes. Pour montrer l'égalité des mesures de probabilité $P_{(X_1,\dots,X_n)}$ et $P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$, il suffit de montrer leur égalité sur un π-système qui engendre la tribu produit $\mathscr{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathscr{E}_n$. Le choix naturel est celui du π-système constitué des pavés mesurables. Considérons donc $F_1 \in \mathscr{E}_1, \dots, F_n \in \mathscr{E}_n$. On a

$$P_{(X_1,\dots,X_n)}(F_1 \times \dots \times F_n) = \mathbb{P}(X_1 \in F_1, \dots, X_n \in F_n).$$

Les événements $\{X_1 \in F_1\}, \dots, \{X_n \in F_n\}$ appartiennent respectivement à $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$, qui sont indépendantes par hypothèse. Ainsi,

$$\begin{aligned} P_{(X_1,\dots,X_n)}(F_1 \times \dots \times F_n) &= \mathbb{P}(X_1 \in F_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in F_n) \\ &= P_{X_1}(F_1) \dots P_{X_n}(F_n) \\ &= (P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n})(F_1 \times \dots \times F_n), \end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité souhaitée.

Réciproquement, supposons que la deuxième assertion ait lieu et montrons que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. Par définition, nous devons montrer que les tribus $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ sont indépendantes. Pour ce faire, et encore par définition, il nous faut choisir n événements $A_1 \in \sigma(X_1), \dots A_n \in \sigma(X_n)$ et montrer que la probabilité de leur intersection est le produit de leurs probabilités.

Or la tribu $\sigma(X_1)$, par exemple, est l'ensemble des images réciproques par X_1 des événements de la tribu $\mathscr{E}_1$. Ainsi, il existe $F_1 \in \mathscr{E}_1$ tel que $A_1 = X_1^{-1}(A_1)$. De même, il existe, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, un événement $F_i \in \mathscr{E}_i$ tel que $A_i = X_i^{-1}(F_i)$. Calculons maintenant la probabilité de $A_1 \cap \dots \cap A_n$. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= \mathbb{P}(X_1^{-1}(F_1) \cap \dots \cap X_n^{-1}(F_n)) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in F_1, \dots, X_n \in F_n) \\ &= P_{(X_1,\dots,X_n)}(F_1 \times \dots \times F_n) \end{aligned}$$

et par hypothèse, ceci est égal à

$$P_{X_1}(F_1) \dots P_{X_n}(F_n) = \mathbb{P}(X_1^{-1}(F_1)) \dots \mathbb{P}(X_n^{-1}(F_n)) = \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n),$$

ce qui conclut la démonstration. □

Exercice 4 *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires, à valeurs dans des ensembles finis que l'on note respectivement $E_1, \dots, E_n$. Montrer que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tous $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$, on a $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n)$.*

Exercice 5 *Soit $n \geqslant 3$. Soient $X_1, \dots, X_{n-1}$ des variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on ait $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $X_n = X_1 \dots X_{n-1}$, le produit de $X_1, \dots, X_n$. Vérifier que X_n a la même distribution que chacune des variables aléatoires $X_1, \dots, X_{n-1}$. Montrer que les n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas indépendantes, mais que $n-1$ quelconques d'entre elles (et plus généralement k quelconques d'entre elles, pour tout $k \in \{2, \dots, n-1\}$) sont indépendantes.*

4 Tribus indépendantes

La proposition suivante est un outil très utile pour démontrer que des tribus sont indépendantes.

Proposition 4 *Soient $n \geqslant 2$ un entier et $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_n$ des sous-tribus de $\mathscr{F}$. Soient $\mathscr{I}_1, \ldots, \mathscr{I}_n$ des π-systèmes sur Ω tels que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on ait $\sigma(\mathscr{I}_j) = \mathscr{G}_j$. Les deux assertions sont équivalentes.*

1. $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_n$ sont indépendantes.

2. pour tous $A_1 \in \mathscr{I}_1, \ldots, A_n \in \mathscr{I}_n$, on a $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n)$.

Démonstration. La première assertion implique tautologiquement la seconde : en effet, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, le π-système est inclus dans la tribu $\mathscr{G}_j$, et la seconde assertion est un cas particulier de la définition de l'indépendance de $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_n$.

C'est l'assertion réciproque qui est intéressante. Elle repose sur l'application du lemme de classe monotone, sous la forme de l'assertion suivante, que nous allons d'abord énoncer et démontrer.

À tous éléments $C_1, \ldots, C_{n-1}$ de $\mathscr{F}$, associons la classe

$$\mathscr{M}(C_1, \ldots, C_{n-1}) = \Big\{ G \in \mathscr{F} : \mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap G) = \mathbb{P}(C_1) \ldots \mathbb{P}(C_{n-1}) \mathbb{P}(G) \Big\}.$$

Nous affirmons que si $\mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1}) = \mathbb{P}(C_1) \ldots \mathbb{P}(C_{n-1})$, alors cette classe est une classe monotone.

Montrons-le. Il y a trois choses à vérifier. Tout d'abord, l'hypothèse que $\mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1}) = \mathbb{P}(C_1) \ldots \mathbb{P}(C_{n-1})$ entraîne que Ω appartient à $\mathscr{M}(C_1, \ldots, C_{n-1})$.

Supposons maintenant que deux événements G et H tels que $G \subseteq H$ appartiennent à $\mathscr{M}(C_1, \ldots, C_{n-1})$. Alors

$$C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap (H \setminus G) = (C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap H) \setminus (C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap G),$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap (H \setminus G)) &= \mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap H) - \mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap G) \\ &= \mathbb{P}(C_1) \ldots \mathbb{P}(C_{n-1}) \big(\mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(G) \big) \\ &= \mathbb{P}(C_1) \ldots \mathbb{P}(C_{n-1}) \mathbb{P}(H \setminus G), \end{aligned}$$

ce qui montre que $H \setminus G$ appartient à $\mathscr{M}(C_1, \ldots, C_{n-1})$.

Donnons-nous enfin une suite croissante $(G_k)_{k \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{M}(C_1, \ldots, C_{n-1})$. Notons $G = \bigcup_{k \geqslant 0} G_k$. Alors la suite de terme général $C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap G_k$ est croissante, et l'union des termes de cette suite est $C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap G$. Alors les hypothèses et la propriété de convergence monotone pour les mesures nous permettent d'affirmer que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap G) &= \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap G_k) \\ &= \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(C_1) \ldots \mathbb{P}(C_{n-1}) \mathbb{P}(G_k) \\ &= \mathbb{P}(C_1) \ldots \mathbb{P}(C_{n-1}) \mathbb{P}(G), \end{aligned}$$

si bien que G appartient à $\mathscr{M}(C_1, \ldots, C_{n-1})$.

Ceci conclut la démonstration du fait que $\mathscr{M}(C_1, \ldots, C_{n-1})$ est une classe monotone et nous pouvons à présent utiliser ce fait pour démontrer la proposition.

Cette démonstration se fait par étapes. La première étape consiste à montrer que pour tous événements $G_1 \in \mathscr{G}_1, A_2 \in \mathscr{I}_2, \ldots, A_n \in \mathscr{I}_n$, on a

$$\mathbb{P}(G_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n).$$

Pour cela, fixons $A_2 \in \mathscr{I}_2, \ldots, A_n \in \mathscr{I}_n$. Montrer que l'égalité a lieu pour tout $G_1 \in \mathscr{G}_1$ revient à montrer que la classe $\mathscr{M}(A_2, \ldots, A_n)$ contient $\mathscr{G}_1$. Or notre hypothèse que la deuxième assertion est vérifiée entraîne que $\mathbb{P}(A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n)$, si bien que $\mathscr{M}(A_2, \ldots, A_n)$ est une classe monotone. Or par hypothèse, elle contient le π-système $\mathscr{I}_1$. Donc, en vertu du lemme de classe monotone, elle contient $\sigma(\mathscr{I}_1) = \mathscr{G}_1$.

La première étape est achevée, nous pouvons maintenant passer à la deuxième, qui consiste à montrer que pour tous $G_1 \in \mathscr{G}_1, G_2 \in \mathscr{G}_2, A_3 \in \mathscr{I}_3, \ldots, A_n \in \mathscr{I}_n$, on a

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(G_2)\mathbb{P}(A_3)\ldots\mathbb{P}(A_n).$$

On procède comme à la première étape : la classe $\mathscr{M}(G_1, A_3, \ldots, A_n)$ est une classe monotone, qui contient le π-système $\mathscr{I}_2$, donc elle contient $\sigma(\mathscr{I}_2) = \mathscr{G}_2$, ce qu'on voulait démontrer.

On continue ensuite jusqu'à la n-ième étape, où on aboutit à la conclusion que pour tous $G_1 \in \mathscr{G}_1, \ldots, G_n \in \mathscr{G}_n$, on a

$$\mathbb{P}(G_1 \cap \ldots \cap G_n) = \mathbb{P}(G_1)\ldots\mathbb{P}(G_n),$$

ce qui est la définition de l'indépendance des tribus $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_n$. □

La succession des étapes de la démonstration pourrait être rédigée comme une récurrence, mais cela la rendrait probablement encore plus difficile à lire, sans en éclairer mieux, à mon avis, le fonctionnement.

Une application de ce résultat est la suivante.

Proposition 5 *Soient $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_n$ des sous-tribus de $\mathscr{F}$ indépendantes. Soient $\ell \geqslant 2$ un entier et $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_\ell = n$ des entiers. Pour tout $k \in \{1, \ldots, \ell\}$, posons $\mathscr{H}_k = \sigma(\mathscr{G}_{m_{k-1}+1}, \ldots, \mathscr{G}_{m_k})$. Alors les tribus $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_\ell$ sont indépendantes.*

Par exemple, si $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_6$ sont indépendantes, la proposition affirme que les sous-tribus $\sigma(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2), \mathscr{G}_3, \sigma(\mathscr{G}_4, \mathscr{G}_5, \mathscr{G}_6)$ sont indépendantes.

Exercice 6 *Déterminer avec quelles valeurs de n, ℓ, $m_0, \ldots, m_\ell$ on a appliqué la proposition pour obtenir l'assertion donné ci-dessus en exemple.*

Exercice 7 *Montrer que si $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_m$ sont des sous-tribus de $\mathscr{F}$, alors la classe*

$$\{G_1 \cap \ldots \cap G_m : G_1 \in \mathscr{G}_1, \ldots, G_m \in \mathscr{G}_m\}$$

est un π-système qui engendre $\sigma(\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_m)$.

Exercice 8 *Démontrer la proposition 5 en utilisant l'exercice ci-dessus et la proposition 4.*

5 La loi du $0-1$ de Kolmogorov

Pour conclure, énonçons et démontrons la loi du $0-1$ de Kolmogorov.

Théorème 5.1 *Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(\mathscr{G}_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de sous-tribus indépendantes. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $\mathscr{H}_n = \sigma(\mathscr{G}_p : p \geqslant n)$. On pose $\mathscr{H}_\infty = \bigcap_{n\geqslant 0} \mathscr{H}_n$.*

Pour tout événement $A \in \mathscr{H}_\infty$, on a $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Démonstration. La démonstration consiste à démontrer que la tribu $\mathscr{H}_\infty$ est indépendante d'elle-même. Ceci implique en effet que pour tout $A \in \mathscr{H}_\infty$, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$, ce qui entraîne que $\mathbb{P}(A)$ ne peut valoir que 0 ou 1.

Pour montrer que $\mathscr{H}_\infty$ est indépendante d'elle-même, introduisons, pour tout $n \geqslant 0$, la tribu $\mathscr{F}_n = \sigma(\mathscr{G}_p : 0 \leqslant p \leqslant n)$. Notons $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\mathscr{G}_p : p \geqslant 0)$, qui est aussi égale à $\mathscr{H}_0$.

Tout d'abord, nous avons l'inclusion

$$\mathscr{H}_\infty \subseteq \mathscr{H}_0 = \mathscr{F}_\infty.$$

Pour montrer que $\mathscr{H}_\infty$ est indépendante d'elle-même, il suffit donc de montrer que $\mathscr{H}_\infty$ est indépendante de $\mathscr{F}_\infty$.

Observons que la classe de parties $\mathscr{I} = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathscr{F}_n$, qui engendre la tribu $\mathscr{F}_\infty$, est un π-système. En effet, si B et C appartiennent à $\mathscr{I}$, alors il existe n et m entiers tels que $B \in \mathscr{F}_n$ et $C \in \mathscr{F}_m$. Or la suite $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ de tribus est croissante pour l'inclusion, si bien qu'en posant $p = \max(n, m)$, on a $B, C \in \mathscr{F}_p$. En particulier, $B \cap C \in \mathscr{F}_p \subseteq \mathscr{I}$.

En vertu de la proposition 4, il nous suffit donc de montrer que pour tout $H \in \mathscr{H}_\infty$ et tout $F \in \mathscr{I}$, on a $\mathbb{P}(H \cap F) = \mathbb{P}(H) \cap \mathbb{P}(F)$. Soient donc $H \in \mathscr{H}_\infty$ et $F \in \mathscr{I}$. Il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $F \in \mathscr{F}_n$. Or $\mathscr{H}_\infty \subseteq \mathscr{H}_{n+1}$ et, grâce à la proposition 5, nous savons que les tribus $\mathscr{F}_n$ et $\mathscr{H}_{n+1}$ sont indépendantes. On a donc bien $\mathbb{P}(H \cap F) = \mathbb{P}(H) \cap \mathbb{P}(F)$.

On en déduit que la tribu $\mathscr{H}_\infty$ est indépendante d'elle-même, comme on l'a annoncé. □

Exercice 9 *Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que la convergence presque sûre*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} Y$$

a lieu, vers une certaine variable aléatoire Y. Montrer que Y est constante presque sûrement.

Exercice 10 *Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour un certain réel ℓ, on a*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\right) > 0.$$

Montrer que la convergence a lieu avec probabilité 1.

Exercice 11 *Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour une certaine variable aléatoire Y, on a*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} Y\right) > 0.$$

Montrer qu'il existe une constante ℓ telle que

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \ell.$$