11 octobre

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P}) \qquad X = (X_n)_{n\geq 0} \qquad T$

$$X_{T\wedge n}(\omega) = X_{T(\omega)\wedge n}(\omega)$$

$$\left(X_{T\wedge 0}(\omega), X_{T\wedge 1}(\omega), X_{T\wedge 2}(\omega), \dots\right) =$$
$$= \left(X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_{T(\omega)-1}(\omega), X_{T(\omega)}(\omega), X_{T(\omega)}(\omega), \dots\right)$$

Si $T(\omega) = 3$, c'est la suite $(X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), X_3(\omega), X_3(\omega), \dots)$

- Si X est une $\underline{S}MG$ et T un t.a., alors

$X^T = (X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une $\underline{S}MG$.

Posons $Y_n = X_{T\wedge n}$
$(Y_n)_{n\geq 0}$ $\underline{S}MG$

Conséquence : $\mathbb{E}[X_{T\wedge n}] \geq \mathbb{E}[X_{T\wedge 0}] = \mathbb{E}[X_0]$ $\qquad \mathbb{E}[Y_n] \geq \mathbb{E}[Y_0]$

(Ruine du joueur)

<u>But</u> : X $\underline{S}MG$, $\quad S \leq T$ deux t.a. (avec hypothèses)

$\mathbb{E}[X_T] \geq \mathbb{E}[X_S] \qquad \mathbb{E}[X_m] \geq \mathbb{E}[X_n] \quad n \leq m$

$\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] \geq X_S$? $\qquad \mathbb{E}[X_m | \mathcal{F}_n] \geq X_n$

<u>Tribu des événements antérieurs à un temps d'arrêt</u>

<u>Def</u>: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ $\quad T$ temps d'arrêt

On pose $\mathcal{F}_T = \{ A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n \geq 0, \ A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \}$

et on appelle $\mathcal{F}_T$ la tribu des événements antérieurs à T.

- $\mathcal{F}_T$ est une tribu (exercice)
- $\mathcal{F}_3$? Si $T = 3$ il faut vérifier que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_3$.

Supposons que $T = 3$.

Soit $A \in \mathcal{F}_3$. Montrons que $A \in \mathcal{F}_T$.
Soit $n \geq 0$. $\quad$ Si $n = 3$, $A \cap \{T = n\} = A \in \mathcal{F}_3$
Si $n \neq 3$, $A \cap \{T = n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$.

Soit $A \in \mathcal{F}_T$. Alors, avec $n = 3$, $\underbrace{A \cap \{T = n\}}_{A} \in \underbrace{\mathcal{F}_n}_{\mathcal{F}_3}$.

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n \geq 0, A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

- $T = \infty$ si $A \in \mathcal{F}_T$, alors $A \in \mathcal{F}_\infty$

si $A \in \mathcal{F}_\infty$, $\forall n \geq 0$, $A \cap \{T=n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$
donc $A \in \mathcal{F}_T$.

Remarque : si on posait $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 0, A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n\}$, on aurait, pour $T = \infty$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ et non $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_\infty$.

Prop $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0})$ $\quad S, T$ t.a. $\quad S \leq T$
$(\forall \omega \in \Omega, S(\omega) \leq T(\omega))$

Alors $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

De plus, pour tous t.a. S et T, $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

Démonstration
- Soit $A \in \mathcal{F}_S$. Montrons que $A \in \mathcal{F}_T$.

  - $A \in \mathcal{F}_S$ donc $A \in \mathcal{F}_\infty$
  - Soit $n \geq 0$. $A \cap \{T=n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{A \cap \{S=k\}}_{\mathcal{F}_k} \cap \underbrace{\{T=n\}}_{\in \mathcal{F}_n}$
$\in \mathcal{F}_n$.

  Donc $A \in \mathcal{F}_T$.

- $S \wedge T \leq S$ et $S \wedge T \leq T$ donc $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subseteq \mathcal{F}_S$ et $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subseteq \mathcal{F}_T$
  donc $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subseteq \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

  Soit $A \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. Montrons que $A \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$.

  $A \in \mathcal{F}_S$ donc $A \in \mathcal{F}_\infty$

  Soit $n \geq 0$. $A \cap \{S \wedge T = n\} = \left(\overbrace{A \cap \{S=n\}}^{\in \mathcal{F}_n} \cap \overbrace{\{T \geq n\}}^{\in \mathcal{F}_{n-1}}\right)$

  $\cup \left(\underbrace{A \cap \{T=n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S \geq n\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}}\right) \in \mathcal{F}_n.$

  Donc $A \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$. $\square$

Question $\mathcal{F}_{S\vee T} \overset{?}{\underset{\supseteq}{=}} \sigma(\mathcal{F}_S \cup \mathcal{F}_T)$

- $X = (X_n)_{n\geq 0}$ $\quad T$ t.a. $\quad X_T$?

$(X_T)(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ a un sens si $T(\omega)<\infty$.

Définition $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ $\quad X = (X_n)_{n\geq 0}$ suite de v.a.

T t.a.

1. Si $T<\infty$ p.s., on définit la v.a.

$$(X_T)(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$$

2. En général, on pose

$$(X_T \cdot \mathbb{1}_{\{T<\infty\}})(\omega) = \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega) & \text{si } T(\omega)<\infty \\ 0 & \text{si } T(\omega)=\infty \end{cases}$$

Prop Si $X = (X_n)_{n\geq 0}$ est adapté et si T est un t.a. tel que $T<\infty$ (p.s.), alors X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Dém. Soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Montrons que $X_T^{-1}(B) \in \mathcal{F}_T$.

Soit $n\geq 0$. $X_T^{-1}(B) \cap \{T=n\} =$

$= \{\omega \in \Omega : X_T(\omega) \in B \text{ et } T(\omega)=n\}$

$= \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \in B \text{ et } T(\omega)=n\}$

$= \{X_n \in B\} \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n$.

$$X_T^{-1}(B) = \bigsqcup_{n\geq 0} X_T^{-1}(B) \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_\infty . \qquad \square$$

Remarque $X = (X_n)_{n\geq 0}$ adapté $\quad T$ t.a.

$X_{T\wedge n}$ est $\mathcal{F}_{T\wedge n}$-mesurable or $T\wedge n \leq n$

donc $X_{T\wedge n}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Théorème $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ (thm d'arrêt)

$X = (X_n)_{n\geq 0}$ $\underline{S}MG$

$S \leq T$ deux temps d'arrêt bornés.

Alors $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] \geq X_S$ p.s.

Remarques • "T borné" signifie : $\exists\, b \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) \leq b$.

($T < \infty$ p.s. $\underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ T borné)

• Comment montrer que $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] \geq Y$ p.s. ?

| Supposons X intégrable et Y intégrable et $\mathcal{G}$-mes.
| Alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq Y$ p.s. ssi $\forall B \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_B] \geq 0$.

Supposons $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq Y$. Soit $B \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_B] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X-Y).\mathbb{1}_B | \mathcal{G}]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X.\mathbb{1}_B|\mathcal{G}] - Y.\mathbb{1}_B] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Y).\mathbb{1}_B] \geq 0.\end{aligned}$$

Supposons $\forall B \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_B] \geq 0$.

Alors $\forall B \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Y)\mathbb{1}_B] \geq 0$.

Or $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Y$ est $\mathcal{G}$-mesurable

donc $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Y \geq 0$ p.s.

Rappel si Z est $\mathcal{G}$-mesurable,

$Z \geq 0$ p.s. $\iff \forall B \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}[Z.\mathbb{1}_B] \geq 0$.

<u>Démonstration</u> (du théorème) $\quad X$ $\underline{S}MG \quad S\leqslant T$ t.a. bornés

On veut $\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]\geqslant X_S$ p.s. $\qquad 0\leqslant S\leqslant T\leqslant b \in \mathbb{N}$

- X_T intégrable ?

$$|X_T| = \left|\sum_{k=0}^{b} X_k \cdot \mathbb{1}_{\{T=k\}}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{b} |X_k|$$

donc $\mathbb{E}[|X_T|] \leqslant \sum_{k=0}^{b} \mathbb{E}[|X_k|] < \infty$.

- X_S est également intégrable, et $\mathcal{F}_S$-mesurable.

On va montrer que pour tout $B\in\mathcal{F}_S$,

$$\mathbb{E}\left[(X_T - X_S)\cdot\mathbb{1}_B\right] \geqslant 0.$$

$$\mathbb{E}\left[(X_T-X_S)\cdot\mathbb{1}_B\right] = \sum_{k=0}^{b} \mathbb{E}\left[(X_T-X_S)\cdot\mathbb{1}_{B\cap\{S=k\}}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{b} \mathbb{E}\left[(X_T-X_k)\cdot\mathbb{1}_{B\cap\{S=k\}}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{b} \mathbb{E}\left[(X_{T\wedge b}-X_k)\cdot\underbrace{\mathbb{1}_{B\cap\{S=k\}}}_{\in\mathcal{F}_k}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{b} \mathbb{E}\Big[\big(\underbrace{\mathbb{E}[X_{T\wedge b}|\mathcal{F}_k]}_{\substack{(X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0} \text{ est une } \underline{S}MG \\ \text{donc } \mathbb{E}[X_{T\wedge b}|\mathcal{F}_k]\geqslant X_{T\wedge k}}} - X_k\big)^{\in\mathcal{F}_k}\cdot\mathbb{1}_{B\cap\{S=k\}}\Big]$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{b} \mathbb{E}\Big[\underbrace{(X_{\underbrace{T\wedge k}_{=k}}-X_k)}_{=0}\cdot\mathbb{1}_{B\cap\{S=k\}}\Big]$$

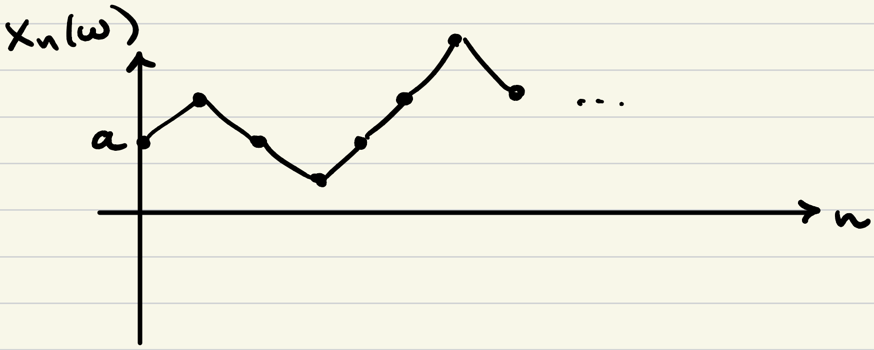
$$\geqslant 0. \qquad \square$$

Ruine du joueur

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\quad (\xi_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d. $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$

$a \in \mathbb{Z}$ $\quad X_0 = a$

$n \geq 1 \quad X_n = X_{n-1} + \xi_n = a + \xi_1 + \dots + \xi_n$

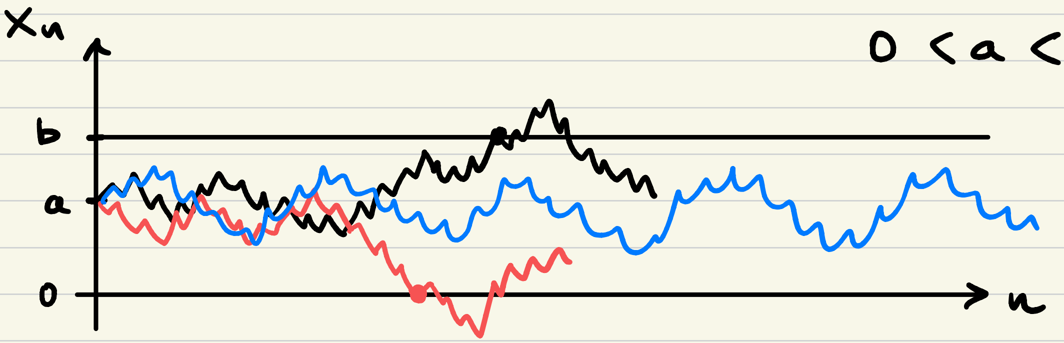


MA simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue de a.

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$

$X = (X_n)_{n\geq 0}$ est une MG.

$0 < a < b$ entiers



$T = \inf\{n \geq 0 : X_n = b \text{ ou } X_n = 0\}$

Calculer $\mathbb{P}(T = \infty)$.

Montrer que $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$.

$\mathbb{P}(X_T = b) = ?$