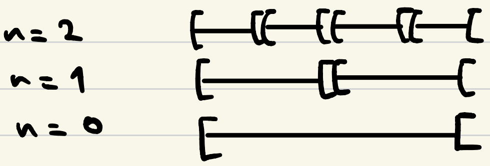
Martingales

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ $\quad X = (X_n)_{n\geq 0}$ v.a. réelles

- X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \geq 0$
- X_n est intégrable pour tout $n \geq 0$
- $\forall n \geq 0, \quad \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \begin{matrix} \geq X_n & \text{SMG} \\ = X_n & \text{MG} \\ \leq X_n & \text{SMG} \end{matrix}$

<u>Exemple</u> $\quad \Omega = [0,1[$

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\left\{ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[, \; 0 \leq k \leq 2^n - 1 \right\}\right)$$

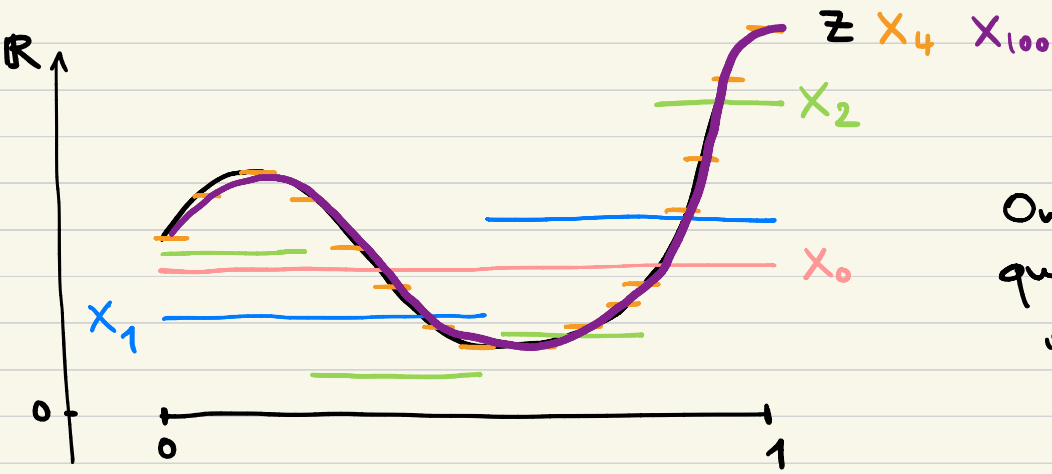


$\mathcal{F}_\infty = \mathcal{B}_{[0,1[} = \mathcal{F}$

$\mathbb{P} =$ mesure de Lebesgue

- Martingale fermée : $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\forall n \geq 0, \quad X_n = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_n]$$



On a l'impression que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Z$

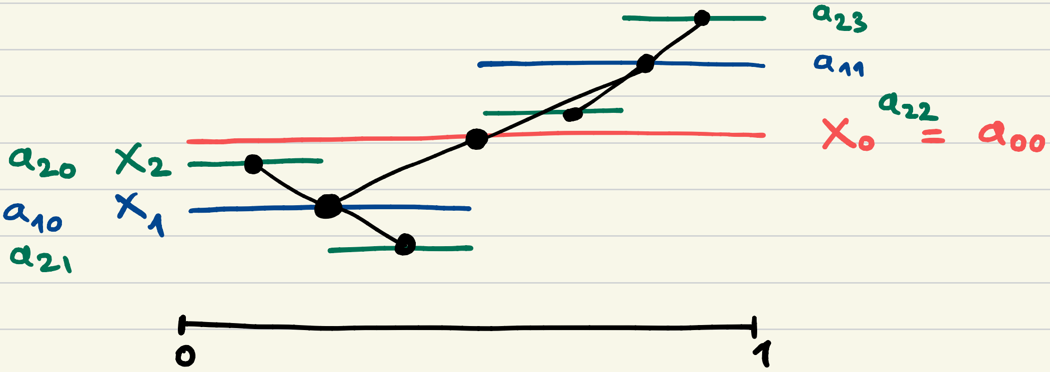
" $X_\infty = Z$ "

(<u>Exemple</u> : $\quad \mathcal{G}_n = \mathcal{F}_0 \quad \forall n \geq 0 \qquad \mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$

$Z \qquad Y_n = \mathbb{E}[Z | \mathcal{G}_n]$ $\quad$ MG par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$)

$Y_n = Y_0 = \mathbb{E}[Z] \not\to Z.$

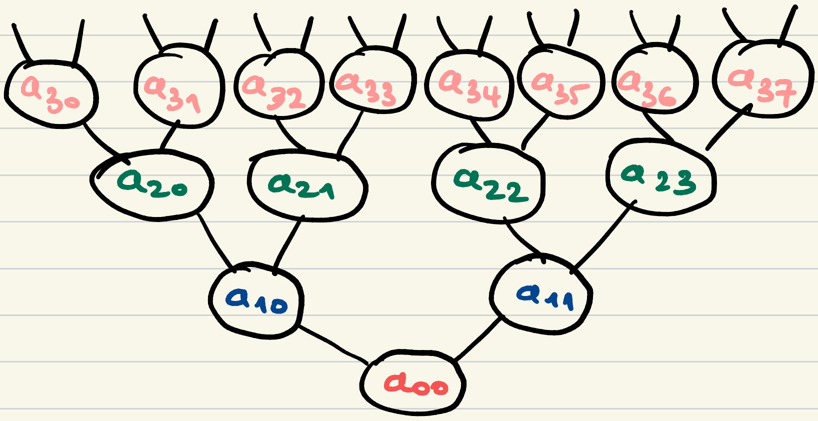
• Martingales sur cet espace filtré.



$$a_{00} = \frac{a_{10}+a_{11}}{2}$$

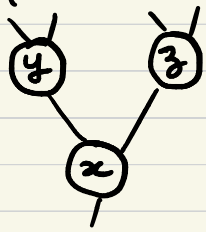
$$a_{10} = \frac{a_{20}+a_{21}}{2}$$

$$a_{11} = \frac{a_{22}+a_{23}}{2}$$



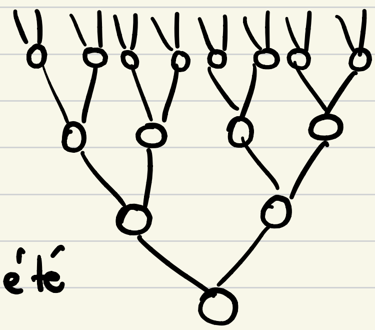
Un nombre réel pour chaque noeud de cet arbre $\longleftrightarrow$ $X = (X_n)_{n \geq 0}$ processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$

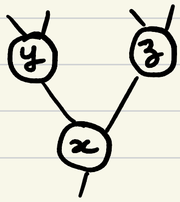
Avec en plus la condition



$x = \frac{y+z}{2}$ $\longleftrightarrow$ X qui est une martingale

<u>Prop</u> Une MG sur $([0,1[, \mathcal{F}_n, \mathcal{B}_{[0,1[}, \mathrm{Leb})$ est exactement la même chose qu'un étiquetage des noeuds de l'arbre ci-contre ayant la propriété de moyenne





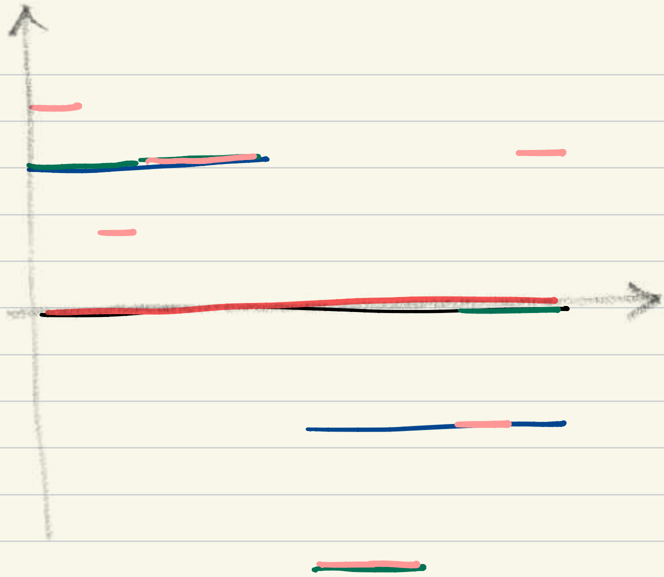
$x = \frac{y+z}{2}$

$\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1 1 −2 −2 −1 1

1 1 −2 0

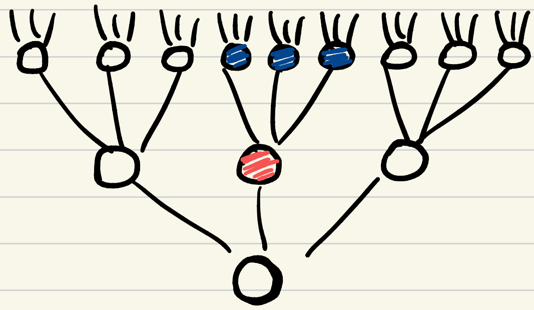
1 −1

0

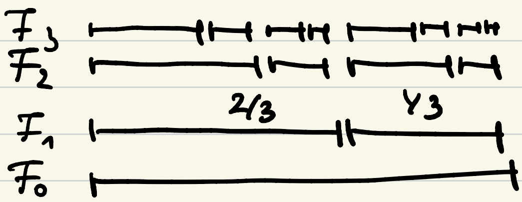


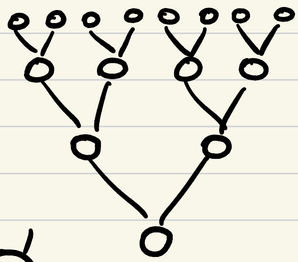
Exemple • $\Omega = [0,1[$ $\quad \mathcal{F}_n = \sigma\left(\left\{\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right[\; ; \; 0 \leq k \leq 3^n - 1\right\}\right)$

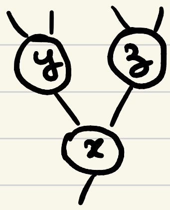
$\mathbb{P} = \text{Leb}.$



•

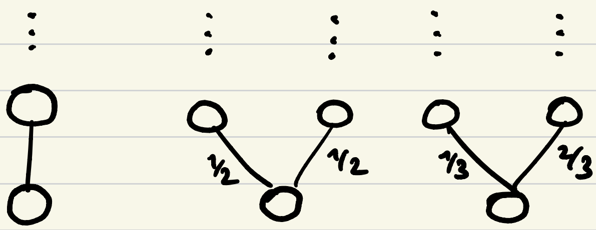




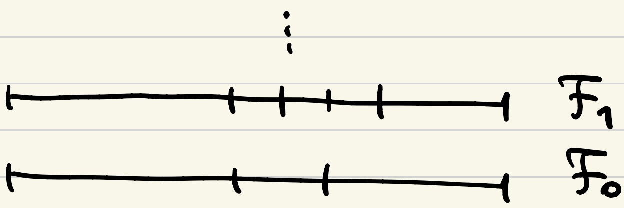


$x = \frac{2}{3} y + \frac{1}{3} z$

•



$\mathcal{F}_0$



Temps d'arrêt

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ $\quad T : \Omega \longrightarrow (\mathbb{N}\cup\{+\infty\}, \mathcal{P}(\mathbb{N}\cup\{+\infty\}))$

Def: T t.a. si $\forall n \geq 0$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

(équiv. : si $\forall n \geq 0$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$)

$\{T = \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$ $\qquad T$ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable.

$= \bigcap_{n\geq 0} \{T > n\} \in \mathcal{F}_\infty$

Exemples • $T = 5$ est un t.a.

• $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ $\qquad X = (X_n)_{n\geq 0}$ adaptée

$B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

temps d'atteinte de B : $T = \inf\{k \geq 0 : X_k \in B\}$

$\inf \emptyset = +\infty$.

Montrons que T est un t.a.

Soit $n \geq 0$. $\qquad \{T \leq n\} = \dots$

$$T(\omega) = \inf\{k \geq 0 : X_k(\omega) \in B\}$$

Calculer $T(\omega)$: $X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{\substack{k \geq n \\ k \leq n}} \{X_k \in B\} \qquad ?$$

$$\begin{aligned}
\{T \leq n\} &= \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq n\} \\
&= \{\omega \in \Omega : \underbrace{\inf\{k \geq 0 : X_k(\omega) \in B\}}_{\in \mathbb{N}} \leq n\} \\
&= \{\omega \in \Omega : \exists k \in \{0, .., n\},\ X_k(\omega) \in B\} \\
&= \bigcup_{k=0}^{n} \{\omega \in \Omega : X_k(\omega) \in B\} \\
&= \bigcup_{k=0}^{n} \overbrace{\{X_k \in B\}}^{\in \mathcal{F}_k} \in \mathcal{F}_n .
\end{aligned}$$

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k \in B\}$$

$$\{T = n\} = \{X_n \in B\} \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} \{X_k \notin B\} \in \mathcal{F}_n .$$

$$\left(= \{T \leq n\} \cap \{T \leq n-1\}^c \right)$$

<u>Proposition</u> $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0})$ S, T t.a.

Alors $\max(S,T)$, $\min(S,T)$, $S+T$ sont des t.a.

<u>Exemple</u> $|S-T|$ n'est pas un t.a. $(T-1)^+$ non plus

n	0	1	2	3	4	5	6	...
S	○	○	○	●	●	●	●	
T	○	○	○	○	○	●	●	

$S = 3$, $T = 5$

<u>Démonstration</u> • $n \geq 0$

$$\{\max(S,T) \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

$$\{\min(S,T) \leq n\} = \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

$$\{S+T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{S \leq n-k\} \cap \{T = k\} \in \mathcal{F}_n$$

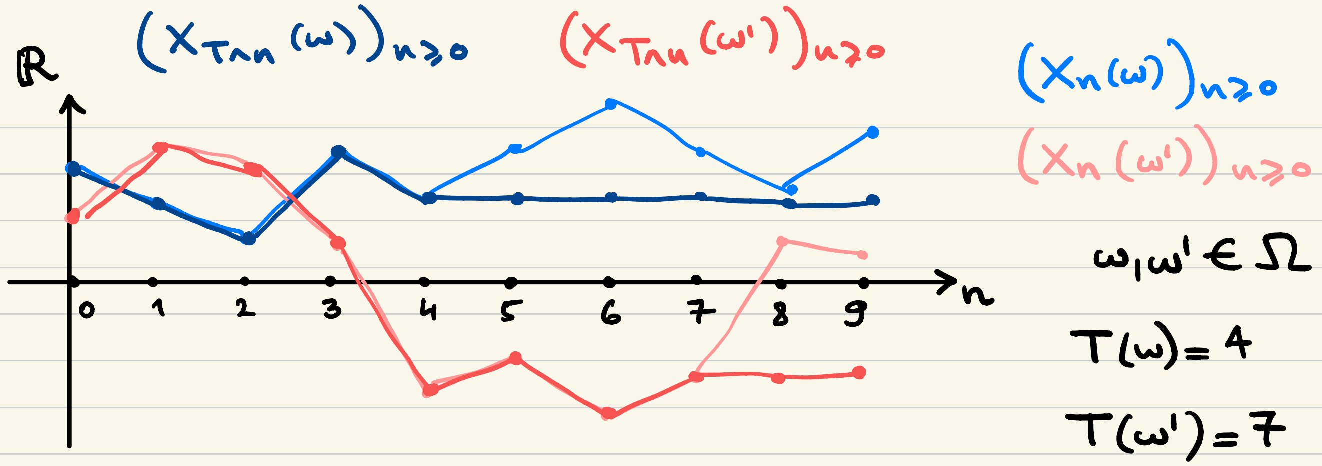
$$\{S+T = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{S = n-k\} \cap \{T = k\} \in \mathcal{F}_n \qquad \square$$

$$\left(S + T = \max(S,T) + \min(S,T) \right)$$

<u>Processus arrêté</u> $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0})$ $X = (X_n)_{n \geq 0}$

T t.a.

$$n \geq 0 : \quad (X_{T \wedge n})(\omega) = X_{T(\omega) \wedge n}(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } n \leq T(\omega) \\ X_{T(\omega)}(\omega) & \text{si } n \geq T(\omega) \end{cases}$$



$\omega, \omega' \in \Omega$

$T(\omega) = 4$

$T(\omega') = 7$

Proposition $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ $X = (X_n)_{n\geq 0}$ adapté, T t.a.

Alors $(X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ (noté X^T) est adapté.

Démonstration On veut montrer que pour tout $n\geq 0$, la v.a. $X_{T\wedge n}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Soit $n \geq 0$. Soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Montrons que

$$\{X_{T\wedge n} \in B\} \in \mathcal{F}_n.$$

$$X_{T\wedge n} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \cdot \mathbb{1}_{\{T=k\}} + X_n \cdot \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}$$

$$\{X_{T\wedge n} \in B\} = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \left(\{T=k\} \cap \{X_k \in B\}\right) \sqcup \{T\geq n\} \cap \{X_n \in B\}$$

$$\in \mathcal{F}_n.$$ $\square$

Proposition $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ $X = (X_n)_{n\geq 0}$ SMG, T t.a.

Alors $X^T = (X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une SMG.

Démonstration • $(X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est adaptée, en vertu de la prop. précédente.

• $n \geq 0$ Montrons que $X_{T\wedge n}$ est intégrable.

$$X_{T\wedge n} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T=k\}} \cdot X_k + \mathbb{1}_{\{T\geq n\}} \cdot X_n$$

donc $|X_{T\wedge n}| \leqslant |X_0| + \cdots + |X_n| \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- Soit $n \geqslant 0$.

$$\mathbb{E}\left[X_{T\wedge(n+1)} \mid \mathcal{F}_n \right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{T=k\}} \cdot X_k + \mathbb{1}_{\{T\geqslant n+1\}} X_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T=k\}} X_k \mid \mathcal{F}_n \right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\underbrace{\{T\geqslant n+1\}}_{\{T\leqslant n\}^c}} X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{T=k\}} \cdot X_k + \mathbb{1}_{\{T\geqslant n+1\}} \underbrace{\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \right]}_{\geqslant X_n}$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T=k\}} X_k + \underbrace{\left(\mathbb{1}_{\{T=n\}} + \mathbb{1}_{\{T\geqslant n+1\}} \right)}_{\mathbb{1}_{\{T\geqslant n\}}} X_n$$

$$= X_{T\wedge n} . \qquad \square$$