

Devoir à la maison n°1

On se donne un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et une sous-tribu $\mathcal{G}$ de la tribu $\mathcal{F}$. Toutes les variables aléatoires sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et sont positives, c'est-à-dire à valeurs dans $([0, \infty], \mathcal{B}_{[0, \infty]})$.

On utilise les conventions habituelles pour l'arithmétique dans $[0, \infty]$ et on convient, pour tout réel $s > 0$, que $\infty^s = \infty$.

Partie 1 – Enveloppe mesurable d'un événement –

Soit $A \in \mathcal{F}$ un événement sur Ω . On définit la variable aléatoire

$$U = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A | \mathcal{G}].$$

1.1. Montrer que $0 \leq U \leq 1$ p.s.

On définit l'événement $B = \{U > 0\}$.

1.2. Montrer que $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B^c} = 0$ p.s. (Indication)

1.3. En déduire que $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$ p.s.

L'événement B s'appelle l'*enveloppe mesurable* de A (ou plus correctement *une* enveloppe mesurable de A) dans la tribu $\mathcal{G}$. C'est, en quelque sorte, le plus petit événement de $\mathcal{G}$ qui contient A . Toutefois, strictement parlant, un tel événement n'existe pas toujours (pourquoi?), et l'événement B défini ci-dessus en est, en général, le meilleur substitut. Il n'est défini qu'à un événement négligeable près. Nous allons maintenant en donner une autre construction.

1.4. Montrer que l'infimum

$$p = \inf \{ \mathbf{P}(G) : G \in \mathcal{G}, \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_G \text{ p.s.} \}$$

est atteint, c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathcal{G}$ tel que $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_C$ p.s. et $\mathbf{P}(C) = p$. (Indication)

Choisissons et fixons un événement $C \in \mathcal{G}$ tel que $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_C$ p.s. et $\mathbf{P}(C) = p$.

1.5. Montrer que $\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_B$ p.s., si bien que C est également une enveloppe mesurable de A dans la tribu $\mathcal{G}$.

1.6. Soit C' un événement de la tribu $\mathcal{G}$. Montrer que C' satisfait les deux propriétés suivantes :

1. $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_{C'}$ p.s.
2. si $G \in \mathcal{G}$ et si $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_G$ p.s., alors $\mathbf{1}_{C'} \leq \mathbf{1}_G$ p.s.

si et seulement si $\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_{C'}$ p.s.

Partie 2 – Supremum essentiel conditionnel d’une variable aléatoire –

Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

2.1. Montrer que pour tout $a \in [0, \infty]$, on a $X \geq a \mathbf{1}_{\{X \geq a\}}$ p.s.

2.2. Soit $a \in [0, \infty]$. Montrer que si $\mathbf{P}(X \geq a) > 0$, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X^n]^{\frac{1}{n}} \geq a.$$

On appelle *supremum essentiel* de X le nombre

$$\text{ess sup } X = \inf \{a \in [0, \infty] : \mathbf{P}(X \geq a) = 0\}.$$

2.3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X^n]^{\frac{1}{n}} = \text{ess sup } X$.

Nous venons de montrer que lorsque n tend vers l’infini, le nombre $\mathbf{E}[X^n]^{\frac{1}{n}}$ tend vers le supremum essentiel de X . Nous allons maintenant démontrer une version conditionnelle de ce résultat, sachant la tribu $\mathcal{G}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, posons

$$Y_n = \mathbf{E}[X^n | \mathcal{G}]^{\frac{1}{n}}.$$

2.4. On suppose, dans cette question uniquement, que la tribu $\mathcal{G}$ est engendrée par une partition $\{A_1, \dots, A_n\}$ de Ω par des éléments de $\mathcal{F}$ de probabilités strictement positives. Montrer que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement et donner une expression de sa limite.

2.5. On ne suppose plus que $\mathcal{G}$ soit engendrée par une partition. Montrer que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ est croissante et en déduire qu’elle converge presque sûrement. (Indication)

On note désormais

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X^n | \mathcal{G}]^{\frac{1}{n}}.$$

2.6. Calculer Y lorsque X est l’indicatrice d’un événement de $\mathcal{F}$.

2.7. Montrer que pour tout $a \in [0, \infty]$, on a $a \mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq Y$ p.s. En déduire que $X \leq Y$ p.s.

2.8. Montrer que si Z est une variable $\mathcal{G}$ -mesurable et si $X \leq Z$ p.s., alors $Y \leq Z$ p.s.

2.9. Montrer que si Y' est une variable aléatoire positive $\mathcal{G}$ -mesurable qui satisfait les deux propriétés suivantes :

1. $X \leq Y'$ p.s.

2. si Z est une variable $\mathcal{G}$ -mesurable et si $X \leq Z$ p.s., alors $Y' \leq Z$ p.s.

alors $Y = Y'$ p.s.

La variable aléatoire Y , définie presque sûrement, est donc la plus petite variable aléatoire $\mathcal{G}$ -mesurable supérieure ou égale à X .

– Indications –

1.2. On pourra calculer l’espérance de cette variable aléatoire, en utilisant un conditionnement sachant la sous-tribu $\mathcal{G}$.

1.4. On pourra considérer une suite d’événements de $\mathcal{G}$ qui contiennent A et dont les probabilités s’approchent de p .

2.5. On pourra utiliser l’inégalité de Jensen conditionnelle, en prenant soin de traiter séparément les cas où des variables aléatoires ne sont pas intégrables.