Corrigé de l'interrogation du 30 novembre 2021

Exercice 1

1. En diagonalisant Q, on obtient

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$Q^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2. La loi de X_n est donnée par μQ^n, où $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ est la loi de X_0. Or Q^n converge vers la matrice Q_∞ définie par

$$Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la loi de X_n converge vers $\mu Q_\infty = (0, 1/2, 1/2)$, quel que soit μ.

Exercice 2

1. (a) Sur $\{M_n = k\}$, on a $M_{n+1} = \sum_{j=1}^k X_{n,j}$, de sorte que

$$A_{n,i,k} = \left\{ M_n = k, \sum_{j=1}^k X_{n,j} = k, \ldots, \sum_{j=1}^k X_{n+i-1,j} = k \right\}.$$

Or, les variables M_n, $\sum_{j=1}^k X_{n,j}$,..., $\sum_{j=1}^k X_{n+i-1,j}$ sont indépendantes (car les $X_{n,j}$ sont i.i.d et car M_n est une fonction des $(X_{m,j})_{m<n, j\in\mathbf{N}}$)). Par conséquent :

$$\mathbf{P}(A_{n,i,k}) = \mathbf{P}(M_n = k) \times \prod_{l=0}^{i-1} \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^k X_{n+l,j} = k \right) = c(k)^i \mathbf{P}(M_n = k)$$

en posant $c(k) = \mathbf{P}(\sum_{j=1}^k X_{1,j} = k)$, qui est strictement inférieur à 1, puisque les $X_{n,j}$ ne sont pas déterministes. (On a besoin de $k \geq 1$ ici, puisque pour $k = 0$, la somme est vide, et on obtient donc une variable aléatoire nulle, donc déterministe).

(b) L'évènement $B_{n,k}$ s'interprète comme

$$B_{n,k} = \{\forall m \geq n, M_m = k\},$$

c'est-à-dire qu'il s'agit de l'évènement sur lequel la suite M_n est, à partir (au moins) du rang n, constante égale à k . Or, la suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs entières, donc elle converge vers k si et seulement si elle est égale à k à partir d'un certain rang. Donc

$$\{M_n \to k\} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_{n,k}.$$

Soit $k \geq 1$. On a, pour tout $i_0 \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(B_{n,k}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_{n,i,k} \right) \leq \mathbf{P}(A_{n,i_0,k}) = c(k)^{i_0} \mathbf{P}(M_n = k).$$

En faisant tendre i_0 vers l'infini, comme $0 \leq c(k) < 1$, on a $\mathbf{P}(B_{n,k}) = 0$, pour tout n. Par conséquent,

$$\mathbf{P}(M_n \to k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} B_{n,k} \right) \leq \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(B_{n,k}) = 0.$$

2. La variable M_n est bien $\mathcal{F}_n$-mesurable, puisque $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la filtration engendrée par M_n. La variable M_n est positive, donc on peut calculer

$$\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} X_{n,j}\mathbf{1}_{j\leq M_n}\middle|\mathcal{F}_n\right] = \sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{E}[X_{n,j}|\mathcal{F}_n]\mathbf{1}_{j\leq M_n} = \sum_{j=1}^{M_n}\mu = \mu M_n.$$

En particulier, $\mathbf{E}M_{n+1} = \mu\mathbf{E}M_n$, donc $\mathbf{E}M_n = \mu^n < \infty$ (car $M_0 = 1$), donc les variables M_n sont intégrables. Enfin, la relation $\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mu M_n$ montre que si $\mu < 1$, $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une sur-martingale, si $\mu = 1$, c'est une martingale, et si $\mu > 1$, c'est une sous-martingale.

3. Pour $\mu < 1$, on a une sur-martingale positive, qui converge donc presque sûrement. Par ailleurs, on a $\mathbf{E}M_n = \mu^n \to 0$, donc $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbf{L}^1$. Par unicité de la limite, la limite presque sûre est également nulle.

4. Pour $\mu = 1$, on a une martingale positive, qui converge donc presque sûrement vers une variable aléatoire M_∞ intégrable, à valeurs entières (puisque M_n est également à valeurs entières). Or, par la question (1b), on a $\mathbf{P}(M_\infty = k) = \mathbf{P}(M_n \to k) = 0$, pour $k \geq 1$. Par conséquent, $\mathbf{P}(M_\infty = 0) = 1$. Si on avait convergence $\mathbf{L}^1$, on aurait $\mathbf{E}M_n \to 0$, or $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une martingale, donc $\mathbf{E}M_n = \mathbf{E}M_0 = 1$. On n'a donc pas convergence au sens $\mathbf{L}^1$.

5. (a) Presque sûrement, la fonction $s \mapsto s^{X_{1,1}}$ est convexe, donc Φ l'est aussi : si $0 < \lambda < 1$, on a

$$\Phi(\lambda s+(1-\lambda)s') = \mathbf{E}[(\lambda s+(1-\lambda)s')^{X_{1,1}}] \leq \mathbf{E}[\lambda s^{X_{1,1}}+(1-\lambda)(s')^{X_{1,1}}] = \lambda\Phi(s)+(1-\lambda)\Phi(s').$$

La dérivabilité s'obtient par le théorème de dérivation sous l'espérance, puisque d'une part la variable $s^{X_{1,1}}$ est intégrable car bornée, et d'autre part, la fonction $s \mapsto s^{X_{1,1}}$ est dérivable, sa dérivée est donnée pas $X_{1,1}s^{X_{1,1}-1}$, qui est majoré (uniformément en $s \in [0,1]$) par la variable intégrable $X_{1,1}$. Enfin, $\Phi(1) = \mathbf{E}[1^{X_{1,1}}] = 1$, et $\Phi'(s) = \mathbf{E}[X_{1,1}s^{X_{1,1}-1}]$, d'où $\Phi'(1) = \mathbf{E}X_{1,1} = \mu > 1$.

   (b) La variable z^{M_n} est bien $\mathcal{F}_n$-mesurable par définition de $\mathcal{F}_n$, et intégrable car bornée. Enfin,

$$\mathbf{E}[z^{M_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}\left[z^{\sum_{j=1}^{M_n} X_{n,j}}\middle|\mathcal{F}_n\right] = \prod_{j=1}^{M_n}\mathbf{E}[z^{X_{n,j}}] = \prod_{j=1}^{M_n}\Phi(z) = \Phi(z)^{M_n} = z^{M_n}.$$

La dernière égalité vient de la définition de z comme un réel vérifiant $\Phi(z) = z$.

   (c) La suite $(z^{M_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est une martingale bornée (elle prend ses valeurs dans $[0,1]$), donc elle converge presque sûrement et dans $\mathbf{L}^1$ vers une variable Z.

Comme la suite prend ses valeurs dans $E = \{z^k, k \in \mathbf{N}\}$ (avec $z < 1$), la variable Z prend ses valeurs dans l'adhérence $\overline{E} = E \cup \{0\}$. Pour $k \geq 1$, l'évènement $\{Z = z^k\}$ est égal à $\{M_n \to k\}$ qui est de probabilité nulle d'après (1b). Ensuite, on a $\{Z = 1\} = \{M_n \to 0\}$ et $\{Z = 0\} = \{M_n \to \infty\}$. Par conséquent :

$$Z = \mathbf{1}_{\{M_n\to 0\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{M_n\to\infty\}}.$$

   (d) En passant à l'espérance grâce à la convergence $\mathbf{L}^1$, on a

$$\mathbf{E}Z = \lim_n \mathbf{E}[z^{M_n}] = \lim_n \mathbf{E}[z^{M_0}] = z.$$

On a donc d'une part

$$z = \mathbf{E}Z = \mathbf{E}\mathbf{1}_{\{M_n\to 0\}} = \mathbf{P}(M_n \to 0),$$

et d'autre part

$$z = \mathbf{E}Z = \mathbf{E}[1 - \mathbf{1}_{\{M_n\to\infty\}}] = 1 - \mathbf{P}(M_n \to \infty).$$