Correction du contrôle continu n° 2

Jeudi 25 novembre 2021

Questions de cours. Voir le cours.

Exercice.

1. Pour tout n, la variable aléatoire M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable car $M_n = f_n(X_1, \ldots, X_n)$, où la fonction $f_n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x_k$ est continue donc mesurable.

Pour tout $k \geq 1$, la variable aléatoire X_k est bornée, au sens où $\mathbb{P}(|X_k| > 3) = 0$. Chaque X_k est donc intégrable. Ainsi, pour tout n, la variable aléatoire M_n est intégrable comme combinaison linéaire finie de variables aléatoires intégrables.

Enfin, pour tout n, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n + a_{n+1}X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_n) + a_{n+1}\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\
&= M_n + a_{n+1}\mathbb{E}(X_{n+1}) \ \text{ car } M_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable et } X_{n+1} \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_n \\
&= M_n + a_{n+1}(\tfrac{1}{4} \times (-3) + \tfrac{3}{4} \times 1) = M_n.
\end{aligned}$$

Donc (M_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de T, on a

$$\{T > n\} = \{\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ |M_k| \leq 1000\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{|M_k| \leq 1000\}.$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'événement $\{|M_k| \leq 1000\}$ appartient à $\mathcal{F}_k$ car M_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable et parce que $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1000\}$ est fermé donc borélien. Ainsi, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'événement $\{|M_k| \leq 1000\}$ est dans $\mathcal{F}_n$: en effet, puisque $k \leq n$, on a $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$. Comme $\mathcal{F}_n$ est une tribu, elle est stable par intersection finie (et même par intersection dénombrable). Par conséquent, $\{T > n\}$ appartient à $\mathcal{F}_n$. Ayant établi cette relation pour tout $n \in \mathbb{N}$, on vient de montrer que T *est un temps d'arrêt.*

3. Pour tout n, presque sûrement, on a $|M_{n+1} - M_n| = |a_{n+1}X_{n+1}| \leq 30$, grâce à nos hypothèses sur les a_k et les X_k. On peut intervertir "presque sûrement" et "pour tout n" dans la phrase précédente car il s'agit d'un "pour tout" portant sur un ensemble dénombrable. Comme $M_0 = 0$ et par définition de T, on a $T \geq 1$. Presque sûrement, pour tout $n \geq 1$, on a $|M_{T\wedge n}| \leq |M_{(T\wedge n)-1}| + |a_{T\wedge n}X_{T\wedge n}| \leq 1000 + 30$, où la dernière inégalité utilise le fait que $(T \wedge n) - 1 \leq T - 1 < T$ et la définition de T. On a également $|M_0| = 0 \leq 1030$. La borne 1030 ne dépend pas de n. Le processus $(M_{T\wedge n})$ est donc borné dans L^∞, donc dans tous les L^p. Or il s'agit d'une martingale puisque (M_n) est une martingale et T est un temps d'arrêt. *Donc $M_{T\wedge n}$ converge presque sûrement.*

4. Pour tout n, presque sûrement, on a $|M_{n+1} - M_n| = |a_{n+1}X_{n+1}| \geq \frac{1}{10}$, grâce à nos hypothèses sur les a_k et les X_k. On peut intervertir "presque sûrement" et "pour tout n" dans la phrase précédente car il s'agit d'un "pour tout" portant sur un ensemble dénombrable. Ainsi, presque sûrement, la suite $(M_{n+1} - M_n)$ ne converge pas vers 0. En particulier, presque sûrement, la suite (M_n) diverge. Ce comportement contraste avec celui de la suite $(M_{T\wedge n})$: on a vu à la question précédente que cette suite convergeait presque sûrement. Or, sur l'événement $\{T = \infty\}$, on a, pour tout n, $M_{T\wedge n} = M_n$. *Comme une suite ne peut pas être à la fois convergente et divergente, l'événement $\{T = \infty\}$ doit être de probabilité nulle.*

5. Remarque : *Poser $M_\infty = 0$ sur l'événement $\{T = \infty\}$ ne servait qu'à s'assurer que M_T a toujours un sens. Cela ne sous-entend pas que M_n converge vers 0 sur l'événement $\{T = \infty\}$: c'est d'ailleurs faux, comme on l'a vu à la question précédente. L'événement $\{T = \infty\}$ étant de probabilité nulle, on aurait tout aussi bien pu poser $M_\infty = 42$ sur l'événement $\{T = \infty\}$ sans que cela ne change rien à la question étudiée — on aurait toujours eu $\mathbb{E}(M_T) = 0$.*

D'après la question 4, T est fini presque sûrement. Par conséquent, presque sûrement, la suite $(M_{T\wedge n})$ converge vers M_T : pour tout $n \geq T$, on a $M_{T\wedge n} = M_T$. Comme $(M_{T\wedge n})$ est une martingale, pour tout n, on a $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_{T\wedge 0}) = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(0) = 0$. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{E}(M_{T\wedge n})$ converge vers $\mathbb{E}(M_T)$ quand n tend vers l'infini (si 0 converge vers $\mathbb{E}(M_T)$, alors $\mathbb{E}(M_T) = 0$). Cela revient à justifier une interversion limite/espérance.

On peut justifier cette interversion à l'aide du théorème de convergence dominée. En effet, on a vu en répondant à la question 3 que, pour tout n, on a $|M_{T\wedge n}| \leq 1030$. Or 1030 est une variable aléatoire constante donc intégrable, et qui ne dépend pas de n. Le théorème de convergence dominée peut donc s'appliquer. *Il s'ensuit que* $\mathbb{E}(M_T) = 0$.

Correction alternative : *Voici une autre façon de justifier l'interversion limite/espérance.*

En répondant à la question 3, on a en particulier montré que $(M_{T\wedge n})$ était une martingale bornée dans L^2. Elle converge donc dans L^2 puisqu'on travaille dans un espace L^p avec $1 < p < \infty$. Maintenant, comme $2 \geq 1$, le fait que $(M_{T\wedge n})$ converge dans L^2 implique que la limite est L^1 et que la convergence a lieu dans L^1. Or $M_{T\wedge n}$ converge presque sûrement vers M_T. Par unicité de la limite lorsque celle-ci existe au sens presque sûr et au sens d'un espace L^p, M_T est dans L^1 et $M_{T\wedge n}$ converge vers M_T dans L^1. En particulier, $\mathbb{E}(M_{T\wedge n})$ converge vers $\mathbb{E}(M_T)$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = M_n^2 - 300n$.

Pour tout n, la variable aléatoire Y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable car M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et $x \mapsto x^2 - 300n$ est continue donc borélienne.

Pour tout n, presque sûrement, $|Y_n| \leq M_n^2 + 300n \leq (30n)^2 + 300n$, grâce aux hypothèses sur les X_k et les a_k. Or, n étant fixé, $(30n)^2 + 300n$ est une variable aléatoire constante donc intégrable. Donc, pour tout n, Y_n est intégrable.

Enfin, pour tout n, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((M_n + a_{n+1}X_{n+1})^2 - 300(n+1)|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(M_n^2 + 2M_n a_{n+1}X_{n+1} + (a_{n+1}X_{n+1})^2 - 300n - 300|\mathcal{F}_n) \\
&= M_n^2 + 2M_n a_{n+1}\mathbb{E}(X_{n+1}) + a_{n+1}^2\mathbb{E}(X_{n+1}^2) - 300n - 300 \\
&\qquad \text{car } M_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable et } X_{n+1} \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_n \\
&= M_n^2 + 2M_n a_{n+1} \times 0 + a_{n+1}^2\mathbb{E}(X_{n+1}^2) - 300n - 300 \\
&= M_n^2 + a_{n+1}^2(\tfrac{1}{4} \times 3^2 + \tfrac{1}{4} \times (-1)^2) - 300n - 300 \\
&\leq M_n^2 + 10^2 \times 3 - 300n - 300 = M_n^2 - 300n = Y_n,
\end{aligned}$$

où l'inégalité utilise le fait que $a_{n+1} \in [-10, 10]$.

Donc $(M_n^2 - 300n)$ *est une surmartingale pour la filtration* $(\mathcal{F}_n)$.

Remarque : *L'inégalité de Jensen conditionnelle était hors-sujet pour cette question. Elle permet de montrer que* (M_n^2) *est une sous-martingale alors qu'il s'agit ici de montrer que* $(M_n^2 - 300n)$ *est une surmartingale.*