Sorbonne Université
Master 1 de mathématiques

Probabilités approfondies
2021-2022

Interrogation du 30 novembre 2021

Durée : 1 heure

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\{1,2,3\}$ dont la matrice de transition est donné par :

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer Q^n.
2. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers une limite ne dépendant pas de la loi de X_0.

Exercice 2

Soit $(X_{n,j})_{(n,j)\in\mathbf{N}^2}$ une famille de variables aléatoires indexées par $\mathbf{N}^2$. On suppose que les $X_{n,j}$ ont tous la même loi, sont à valeurs dans $\mathbf{N}$ et sont intégrables. On note $\mu = \mathbf{E}X_{1,1}$ l'espérance commune aux $X_{n,j}$. On suppose également que les $X_{n,j}$ ne sont pas presque sûrement constantes.

On définit la suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $M_0 = 1$, et

$$M_{n+1} = \sum_{j=1}^{M_n} X_{n,j} = \sum_{j=1}^{\infty} X_{n,j}\mathbf{1}_{j\le M_n}.$$

On peut penser à M_n comme le nombre d'individus d'une population à l'instant n, la variable $X_{n,j}$ correspondant au nombre d'enfants du $j$ème individu de la population existant à l'instant n (les enfants en question faisant donc partie de la population à l'instant $n+1$). On s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1. (a) Soit $k \ge 1$. On pose $A_{n,i,k} = \{M_n = M_{n+1} = \ldots = M_{n+i} = k\}$. Montrer que
   $$\mathbf{P}(A_{n,i,k}) = c(k)^i\mathbf{P}(M_n = k)$$
   où $0 \le c(k) < 1$ est une constante ne dépendant pas de n et i.

   (b) En exprimant l'évènement $\{M_n \to k\}$(note 1) en fonction des $B_{n,k} = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_{n,i,k}$, montrer qu'on a $\mathbf{P}(M_n \to k) = 0$ pour tout $k \ge 1$.
2. En fonction de la valeur de μ, montrer que $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une (sur/sous)-martingale pour la filtration naturelle $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0,\ldots,M_n)$. On pourra vérifier que $\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mu M_n$.
3. Montrer que si $\mu < 1$, alors $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement et dans $\mathbf{L}^1$ vers 0.
4. Montrer que si $\mu = 1$, alors $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers 0. Converge-t-elle dans $\mathbf{L}^1$?
5. On considère désormais le cas $\mu > 1$. On définit la fonction génératrice Φ de $X_{1,1}$ par(note 2)
   $$\Phi(s) = \mathbf{E}(s^{X_{1,1}}).$$

   (a) Montrer que Φ est une fonction convexe et dérivable de $[0,1]$ dans $[0,1]$, vérifiant $\Phi(1) = 1$ et $\Phi'(1) > 1$.

   On peut vérifier qu'il existe donc un unique $0 \le z < 1$ tel que $\Phi(z) = z$ (on ne demande pas de le démontrer).

   (b) Montrer que $(z^{M_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est une martingale à valeurs dans $[0,1]$.

   (c) Montrer que $(z^{M_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement et dans $\mathbf{L}^1$ vers une variable Z que l'on explicitera en fonction de $\mathbf{1}_{\{M_n\to 0\}}$ et $\mathbf{1}_{\{M_n\to\infty\}}$.

   (d) Montrer que $\mathbf{P}(M_n \to 0) = z$, $\mathbf{P}(M_n \to \infty) = 1 - z$.

(note 1) C'est-à-dire l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $M_n(\omega)$ soit une suite convergeant vers k.

(note 2) Pour $s = 0$, on utilisera la convention $0^0 = 1$, de sorte que $s \mapsto s^n$ soit une fonction continue de $[0,1]$ dans lui-même pour tout $n \in \mathbf{N}$.