Contrôle continu n° 2

Jeudi 25 novembre — durée : 1 heure

Les réponses doivent être justifiées. On portera une attention particulière à la rédaction.

Les documents, téléphones portables et autres appareils électroniques sont interdits.

Questions de cours. (2 points) On fixe E un ensemble dénombrable.

1. Donner la définition de « matrice de transition » *(ou de « noyau de transition », c'est pareil).*
2. Soit Q une matrice de transition sur E. Donner la définition de « chaîne de Markov de matrice de transition Q ».

Exercice. (8 points) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On suppose que $\mathbb{P}(X_1 = 3) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{3}{4}$. On définit la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ en posant $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ pour $n \geq 1$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On définit $(M_n)_{n\geq 0}$ en posant $M_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $M_n = \sum_{k=1}^n a_k X_k$.

1. Montrer soigneusement que (M_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Soit $T = \inf\{n \in \mathbb{N} \ : \ |M_n| > 1000\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

À partir de maintenant, on suppose que pour tout n, on a $\frac{1}{10} \leq a_n \leq 10$.

3. Montrer que $M_{T\wedge n}$ converge presque sûrement. *On rappelle la notation* $x \wedge y = \min(x, y)$.
4. En déduire que T est fini presque sûrement.
5. Démontrer que $\mathbb{E}[M_T] = 0$. *Sur l'événement de probabilité nulle* $\{T = \infty\}$, *on pose* $M_\infty = 0$.
6. Montrer que $M_n^2 - 300n$ est une surmartingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

M1 – Probabilités Approfondies Sorbonne Université 2021-2022

Contrôle continu n° 2

Jeudi 25 novembre — durée : 1 heure

Les réponses doivent être justifiées. On portera une attention particulière à la rédaction.

Les documents, téléphones portables et autres appareils électroniques sont interdits.

Questions de cours. (2 points) On fixe E un ensemble dénombrable.

1. Donner la définition de « matrice de transition » *(ou de « noyau de transition », c'est pareil).*
2. Soit Q une matrice de transition sur E. Donner la définition de « chaîne de Markov de matrice de transition Q ».

Exercice. (8 points) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On suppose que $\mathbb{P}(X_1 = 3) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{3}{4}$. On définit la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ en posant $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ pour $n \geq 1$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On définit $(M_n)_{n\geq 0}$ en posant $M_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $M_n = \sum_{k=1}^n a_k X_k$.

1. Montrer soigneusement que (M_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Soit $T = \inf\{n \in \mathbb{N} \ : \ |M_n| > 1000\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

À partir de maintenant, on suppose que pour tout n, on a $\frac{1}{10} \leq a_n \leq 10$.

3. Montrer que $M_{T\wedge n}$ converge presque sûrement. *On rappelle la notation* $x \wedge y = \min(x, y)$.
4. En déduire que T est fini presque sûrement.
5. Démontrer que $\mathbb{E}[M_T] = 0$. *Sur l'événement de probabilité nulle* $\{T = \infty\}$, *on pose* $M_\infty = 0$.
6. Montrer que $M_n^2 - 300n$ est une surmartingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.