Sorbonne Université
Master 1 de mathématiques

Probabilités approfondies
2021-2022

Interrogation du 6 octobre 2021 : corrigé

Exercice 1

1. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T \geq t|N = n) = \mathbf{P}(T_1 \geq t, \ldots, T_N \geq t|N = n) &= \mathbf{P}(T_1 \geq t, \ldots, T_n \geq t|N = n)\\ &= \mathbf{P}(T_1 \geq t, \ldots, T_n \geq t)\\ &= (\mathbf{P}(T_1 \geq t))^n\\ &= e^{-\lambda n t}.\end{aligned}$$

   La troisième égalité est une conséquence de l'indépendance de N et des T_n, la quatrième du fait que les T_n sont indépendants et de même loi.

   On a exprimé $\mathbf{P}(T \geq t|N = n)$ comme une fonction de n, on en déduit donc $\mathbf{P}(T \geq t|N) = e^{-\lambda N t}$.

   Pour calculer $\mathbf{E}(T|N)$, on utilise la relation, valide pour une variable T positive, $\mathbf{E}(T|N) = \int_0^\infty \mathbf{P}(T \geq t|N)dt$:

$$\mathbf{E}(T|N) = \int_0^\infty \mathbf{P}(T \geq t|N)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda N t}dt = \frac{1}{\lambda N}.$$

2. Comme l'espérance de l'espérance conditionnelle est égale à l'espérance, on a, pour $t > 0$.

$$\mathbf{P}(T \geq t) = \mathbf{E}(\mathbf{P}(T \geq t|N)) = \mathbf{E}(e^{-\lambda N t}) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda n t}(1-p)p^{n-1} = \frac{e^{-\lambda t}(1-p)}{1-pe^{-\lambda t}}.$$

   Cette fonction étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$, on en déduit la densité f_T de T en dérivant :

$$f_T(t) = -\partial_t \mathbf{P}(T \geq t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(1-p)}{(1-pe^{-\lambda t})^2}.$$

Exercice 2

1. Les X_n étant indépendantes, on a

$$\mathbf{V}(M_n) = \mathbf{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbf{P}(|M_{n^2} - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(M_{n^2})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n^2\varepsilon^2}.$$

   Notamment, $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}(|M_{n^2} - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$. Le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure que $\mathbf{P}(\Omega_\varepsilon) = 1$.

3. L'évènement $\tilde{\Omega} = \bigcap_{q \in \mathbf{N}^*} \Omega_{1/q}$ est de probabilité 1 comme intersection dénombrable d'évènements de probabilité 1. Or, sur $\tilde{\Omega}$, la suite $(M_{n^2})_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers μ. Par conséquent, $(M_{n^2})_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers μ.

4. (a) Par définition de la partie entière, on a $\sqrt{n} - 1 \leq [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$. En passant au carré, on obtient $n - 2\sqrt{n} + 1 \leq q_n \leq n$.

(b) On a l'égalité $T_n = \left(\frac{q_n}{n} - 1\right) M_{q_n}$. Comme les q_n sont des carrés d'entiers convergeant vers ∞ et que $M_{n^2} \to \mu$, on a $M_{q_n} \to \mu$ (presque sûrement). Par ailleurs, d'après la question précédente,

$$0 \leftarrow \frac{n - 2\sqrt{n} + 1}{n} - 1 \leq \frac{q_n}{n} - 1 \leq \frac{n}{n} - 1 = 0,$$

de sorte que $\frac{q_n}{n} - 1$ tend vers 0. On a donc bien $T_n \to 0$ presque sûrement.

(c) Comme dans la question 1, on a

$$\mathbf{V}(U_n) = \mathbf{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=q_n+1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=q_n+1}^{n} \sigma^2 = \frac{n - q_n}{n^2} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = 2n^{-3/2}.$$

En particulier, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{V}(U_n) < \infty$. La convergence presque sûre de $U_n - \mathbf{E}U_n$ vers 0 se déduit des arguments utilisant le lemme de Borel-Cantelli invoqués dans les questions 2 et 3. Par ailleurs $\mathbf{E}U_n = \frac{n-q_n}{n}\mu$ qui converge vers 0.

5. On remarque que $M_n = (M_n - M_{q_n}) + M_{q_n} = (U_n + V_n) + M_{q_n}$, qui converge presque sûrement vers $0+0+\mu$. On a bien montré la loi forte des grands nombres pour des variables $\mathbf{L}^2$: si $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d que l'on suppose de carré intégrable, alors on a la convergence presque sûre

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathbf{E}X_1.$$