Correction du contrôle continu n^o 1

Jeudi 7 octobre 2021

Question de cours. On dit que Y est une espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{G}$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. Y est intégrable,
2. Y est $\mathcal{G}$-mesurable,
3. pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A)$.

Exercice 1. Pour tous $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_{n,\varepsilon} = \{|X_n| \geq \varepsilon\}$. Il s'agit de montrer que, presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquelles $A_{n,\varepsilon}$ a lieu.

Pour ce faire, dans un premier temps, montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, presque sûrement, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquelles $A_{n,\varepsilon}$ a lieu. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|X_n|$ est une variable aléatoire positive et comme $\varepsilon > 0$, on peut appliquer l'inégalité de Markov à $|X_n|$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $\mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) \leq \mathbb{E}(|X_n|)/\varepsilon$. Ainsi, il découle de $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ qu'on a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) < \infty$. Par le lemme de Borel–Cantelli, presque sûrement, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquelles $A_{n,\varepsilon}$ a lieu.

Pour conclure, il s'agit d'intervertir “presque sûrement” et “pour tout ε”. Si on se restreint à une quantité dénombrable de valeurs de ε, cela est possible. Ainsi, il est vrai que, presque sûrement, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquelles $A_{n,1/k}$ a lieu. On remarque que, à ω fixé, si la condition demandée est vraie pour une valeur $1/k$, alors elle est vraie pour tout $\varepsilon \geq 1/k$. Puisque $]0,\infty[= \bigcup_{k\geq 1}[1/k,\infty[$, on a obtenu l'énoncé souhaité. *Donc X_n converge vers 0 presque sûrement.*

Exercice 2.

1. La fonction $x \mapsto \exp(x/3)$ est continue donc mesurable. Par conséquent, $Z = \exp(Y/3)$ est $\sigma(Y)$-mesurable. Or X et Y sont indépendantes. *Donc X et Z sont indépendantes.*

2. La variable aléatoire X^2 est positive. Comme X et Z sont positives, la variable aléatoire XZ est positive. Donc l'espérance de $X(X+Z)$ a un sens et est égale à $\mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(XZ)$, somme dont les deux termes ont bien un sens.

Par théorème de transfert, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}[\frac{x^3}{3}]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$.

Par ailleurs, X et Z sont positives et indépendantes. Ainsi, toutes les espérances de l'égalité suivante ont un sens et cette égalité est valide : $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)$. L'espérance d'une variable aléatoire uniforme à valeurs dans $[0, 2\pi]$ vaut $\frac{2\pi - 0}{2} = \pi$. Par théorème de transfert, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{y/3}e^{-y/2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y/6}\mathrm{d}y = \frac{6}{2} = 3$.

Donc l'espérance de $X(X+Z)$ a un sens et vaut $3\pi + \frac{4}{3}\pi^2$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Calculons $\mathbb{E}(f(V_1, V_2))$. Comme X et Y sont indépendantes, de lois respectives $\mathsf{Unif}(]0,2\pi[)$ et $\mathsf{Exp}(\frac{1}{2})$, le théorème de transfert donne

$$\mathbb{E}(f(V_1,V_2)) = \int_{]0,2\pi[\times]0,\infty[} f\left(\sqrt{y}\cos(x), \sqrt{y}, \sin(x)\right) \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}e^{-y/2}\mathrm{d}(x,y).$$

On pose $\varphi :]0,2\pi[\ \times\ ]0,\infty[\ \to \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty[\times\{0\})$ définie par $\varphi(x,y) = \left(\sqrt{y}\cos(x), \sqrt{y}\sin(x)\right)$. Il s'agit d'une fonction bijective définie d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et qui est de classe $\mathcal{C}^1$: en effet, cosinus et sinus sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $y \mapsto \sqrt{y}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si on prend soin de la considérer seulement sur $]0,\infty[$. Le déterminant de sa différentielle en (x,y) vaut

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{y}\sin(x) & \frac{\cos(x)}{2\sqrt{y}} \\ \sqrt{y}\cos(x) & \frac{\sin(x)}{2\sqrt{y}} \end{vmatrix} = (-\sqrt{y}\sin(x))\times\left(\frac{\sin(x)}{2\sqrt{y}}\right) - (\sqrt{y}\cos(x))\times\left(\frac{\cos(x)}{2\sqrt{y}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Comme ce déterminant est non-nul pour tout (x, y) dans le domaine de définition de φ, l'application φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Grâce à cela, et comme f est borélienne et positive, on peut appliquer le théorème de changement de variables, ce qui donne :

$$\mathbb{E}(f(V_1, V_2)) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty[\times\{0\})} f(v_1, v_2) \frac{e^{-(v_1^2+v_2^2)/2}}{4\pi} \frac{1}{\left|-\frac{1}{2}\right|} \mathrm{d}(v_1, v_2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(v_1, v_2) \frac{e^{-v_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-v_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}(v_1, v_2).$$

Plus précisément, dans la première égalité, on a utilisé le fait que $y = (\sqrt{y}\cos(x))^2 + (\sqrt{y}\sin(x))^2$ ainsi que la valeur calculée pour le jacobien. Dans la seconde égalité, on s'est servi du fait que $[0, \infty[\times\{0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^2$.

Le vecteur aléatoire (V_1, V_2) est donc un vecteur aléatoire à densité, qui admet pour densité $(v_1, v_2) \mapsto \frac{e^{-v_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-v_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. On remarque que cette densité est de la forme $(v_1, v_2) \mapsto \rho(v_1)\rho(v_2)$, où ρ désigne la densité définissant la loi normale centrée réduite (espérance nulle, variance 1). On en déduit que V_1 et V_2 sont indépendantes (formule produit pour la densité) et que V_1 et V_2 sont chacune de loi normale centrée réduite.