Interrogation du 6 octobre 2021

Durée : 1 heure

Exercice 1

Soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et soit N une variable de loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$ indépendante de la suite $(T_n)_{n\in N}$. Précisément :

$$\forall t > 0,\ \mathbf{P}(T_n \geq t) = e^{-\lambda t}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{P}(N = n) = (1-p)p^{n-1}.$$

On pose $T = \min(T_1, \ldots, T_N)$.

1. Soit $t > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\mathbf{P}(T \geq t | N = n)$. En déduire $\mathbf{P}(T \geq t|N)$ puis $\mathbf{E}(T|N)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(T \geq t)$ et en déduire la densité de T.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ et on note $\mu = \mathbf{E}X_1$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}(X_1)$ la moyenne et la variance communes des X_n. Le but de l'exercice est de montrer la loi des grands nombres pour la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On pose

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Calculer la variance de M_n.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'évènement $\Omega_\varepsilon = \limsup_n \{|M_{n^2} - \mu| > \varepsilon\}$ est de probabilité 1.
3. En déduire que $(M_{n^2})_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers μ.
4. Pour $n \geq 1$, on pose $q_n = [\sqrt{n}]^2$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière.
   (a) Montrer que $n - 2\sqrt{n} + 1 \leq q_n \leq n$.
   (b) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $T_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q_n}\right)\sum_{k=1}^{q_n} X_k$ converge presque sûrement vers 0.
   (c) Majorer la variance de $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=q_n+1}^{n} X_k$ et en déduire que $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers 0.
5. Conclure.