Contrôle continu n° 1

Jeudi 7 octobre 2021 — durée : 1 heure

Les réponses doivent être justifiées. On portera une attention particulière à la rédaction.

Les documents, téléphones portables et autres appareils électroniques sont interdits.

Question de cours. (2 points) Soit X une variable aléatoire réelle *intégrable* définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit Y une variable aléatoire *réelle* définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Sous quelles conditions dit-on que Y est une espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{G}$?

Exercice 1. (3 points) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité. On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. Montrer que X_n converge presque sûrement vers 0. *Indication : on pourra utiliser, en en vérifiant soigneusement les hypothèses, l'inégalité de Markov et le lemme de Borel–Cantelli.*

Exercice 2. (5 points) Soit X une variable aléatoire uniforme dans $]0, 2\pi[$. Soit Y une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. On suppose X et Y indépendantes. On pose $Z = \exp(Y/3)$.

1. Montrer que X et Z sont indépendantes. *Si les arguments sont là, la réponse n'a pas à être longue.*
2. Calculer l'espérance de $X(X + Z)$. *Justifier rigoureusement le fait que cette espérance est bien définie. De même, justifier soigneusement que chaque quantité intermédiaire de votre démonstration est bien définie et que les égalités invoquées sont correctes.*
3. À l'aide d'un changement de variables, montrer que le vecteur aléatoire (V_1, V_2) défini en posant $(V_1, V_2) = \left(\sqrt{Y}\cos(X), \sqrt{Y}\sin(X)\right)$ est un vecteur aléatoire à densité, et en expliciter une densité. Que peut-on en déduire sur les variables aléatoires V_1 et V_2 ?

M1 – Probabilités Approfondies Sorbonne Université 2021-2022

Contrôle continu n° 1

Jeudi 7 octobre 2021 — durée : 1 heure

Les réponses doivent être justifiées. On portera une attention particulière à la rédaction.

Les documents, téléphones portables et autres appareils électroniques sont interdits.

Question de cours. (2 points) Soit X une variable aléatoire réelle *intégrable* définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit Y une variable aléatoire *réelle* définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Sous quelles conditions dit-on que Y est une espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{G}$?

Exercice 1. (3 points) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité. On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. Montrer que X_n converge presque sûrement vers 0. *Indication : on pourra utiliser, en en vérifiant soigneusement les hypothèses, l'inégalité de Markov et le lemme de Borel–Cantelli.*

Exercice 2. (5 points) Soit X une variable aléatoire uniforme dans $]0, 2\pi[$. Soit Y une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. On suppose X et Y indépendantes. On pose $Z = \exp(Y/3)$.

1. Montrer que X et Z sont indépendantes. *Si les arguments sont là, la réponse n'a pas à être longue.*
2. Calculer l'espérance de $X(X + Z)$. *Justifier rigoureusement le fait que cette espérance est bien définie. De même, justifier soigneusement que chaque quantité intermédiaire de votre démonstration est bien définie et que les égalités invoquées sont correctes.*
3. À l'aide d'un changement de variables, montrer que le vecteur aléatoire (V_1, V_2) défini en posant $(V_1, V_2) = \left(\sqrt{Y}\cos(X), \sqrt{Y}\sin(X)\right)$ est un vecteur aléatoire à densité, et en expliciter une densité. Que peut-on en déduire sur les variables aléatoires V_1 et V_2 ?