Partiel

L'épreuve dure deux heures.
Les quatre exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
La note finale sera sur 30 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 6 points (3+3)

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On fait l'hypothèse suivante :

$$\forall A \in \mathscr{F}, \quad \mathbf{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbf{E}[Y\mathbf{1}_A].$$

Montrer que $X = Y$ p.s.

2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un suite adaptée de variables aléatoires réelles sur un espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in B\}$$

est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Solution de l'exercice 1

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons $A_n = \{X \geqslant Y + \frac{1}{n}\}$. L'hypothèse entraîne les égalités et inégalités

$$\mathbf{E}[Y\mathbf{1}_{A_n}] = \mathbf{E}[X\mathbf{1}_{A_n}] \geqslant \mathbf{E}\big[(Y + \tfrac{1}{n})\mathbf{1}_{A_n}\big] = \mathbf{E}[Y\mathbf{1}_{A_n}] + \tfrac{1}{n}\mathbf{P}(A_n),$$

dont il découle que $\mathbf{P}(A_n)$ est négative, donc nulle. L'égalité

$$\{X > Y\} = \bigcup_{n\geqslant 1}\{X \geqslant Y + \tfrac{1}{n}\}$$

permet d'en déduire que $\mathbf{P}(X > Y) = 0$. Par symétrie des hypothèses vis-à-vis de l'échange de X et Y, on a également $\mathbf{P}(Y > X) = 0$. Finalement, $X = Y$ p.s.

2. Par définition d'un temps d'arrêt, il faut montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'événement $\{T \leqslant n\}$ appartient à $\mathscr{F}_n$. L'égalité

$$\{T \leqslant n\} = \bigcup_{k=0}^{n}\{X_k \in B\}$$

et le fait que pour tout $k \geqslant 0$ la variable aléatoire X_k soit $\mathscr{F}_k$-mesurable montrent que c'est bien le cas.

Cet exercice a généralement été bien traité. Quelques personnes n'ont pas "joué le jeu" de la première question, et ont invoqué, sous une forme plus ou moins déguisée, au lieu de le redémontrer,

le résultat du cours qu'il s'agissait de démontrer.
De mon point de vue, l'essentiel était que vous reteniez qu'une inégalité stricte telle que $X > Y$ peut être quantifiée et exprimée en disant que pour tout ω, il existe n, dépendant de ω, tel que $X(\omega) \geqslant Y(\omega) + \frac{1}{n}$.

Exercice 2

Barème indicatif : 12 points (3+3+3+3)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

1. Soient M et N deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1. Déterminer une fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{E}[MN \,|\, M+N] = h(M+N)$ p.s.

2. On note $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ la densité

$$f : (x,y) \mapsto \frac{c}{x}\, \mathbf{1}_\Delta(x,y),$$

où c est un réel positif.

Calculer la loi de X, la loi de Y, puis $\mathbf{E}[X \,|\, Y]$ et $\mathbf{E}[Y \,|\, X]$.

3. Soit T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $K = \lfloor T \rfloor$ la partie entière de T.

Calculer $\mathbf{E}[e^{-T} \,|\, K]$.

4 . Soit (F,G,H) un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout réel α, calculer $\mathbf{E}[F \,|\, G + \alpha H]$.

Solution de l'exercice 2

1. Commençons par calculer la loi de la variable aléatoire $M+N$, qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(M+N=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(M=k)\mathbf{P}(N=n-k) = e^{-2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!} = \frac{e^{-2}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = e^{-2}\frac{2^n}{n!}.$$

Nous retrouvons le fait bien connu que $M+N$ suit la loi de Poisson de paramètre 2. Appliquons maintenant la méthode de la fonction muette. Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Calculons $\mathbf{E}[MN\, g(M+N)]$. Nous trouvons

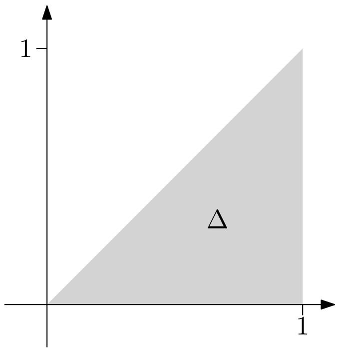
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[MN\, g(M+N)] &= e^{-2}\sum_{a,b\in\mathbb{N}} \frac{ab\; g(a+b)}{a!b!} = e^{-2}\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{k(n-k)\; g(n)}{k!(n-k)!} \\
&= e^{-2}\sum_{n\geqslant 0} g(n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k-1)!(n-k-1)!} = e^{-2}\sum_{n\geqslant 0} g(n)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!(n-2-k)!} \\
&= e^{-2}\sum_{n\geqslant 0} g(n)\frac{2^{n-2}}{(n-2)!} = e^{-2}\sum_{n\geqslant 0}\frac{n(n-1)}{4}\, g(n)\,\frac{2^n}{n!} \\
&= \mathbf{E}[h(M+N)\; g(M+N)],
\end{aligned}$$

pourvu qu'on pose, pour tout entier n,

$$\boxed{h(n) = \frac{n(n-1)}{4}}$$

Cette question a été très rarement traitée jusqu'au bout. Le calcul n'était effectivement pas très simple, et n'a été mené que dans quelques rares copies.

2. La première chose est de dessiner le domaine Δ :



Calculons maintenant les lois de X et Y. Puisque la loi du couple (X, Y) admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, les lois de X et de Y admettent chacune une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La densité de la loi de X est donnée par

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}y = c\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{x}\,\mathbf{1}_{[0,1]}(x) = c\,\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Puisque l'intégrale de cette densité vaut 1, nous savons maintenant que $c = 1$, et X est uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

La densité de la loi de Y est donnée par

$$f_X(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}\,\mathbf{1}_{[0,1]}(y) = -\ln(y)\,\mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$

Calculons $\mathbf{E}[X|Y]$ en utilisant la méthode de la fonction muette. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Calculons $\mathbf{E}[Xg(Y)]$. Puisque toutes les fonctions que nous intégrons sont positives, nous pouvons utiliser le théorème de Fubini, et nous trouvons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Xg(Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} xg(y)\,f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 g(y)\Big(\int_y^1 x\frac{c}{x}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 g(y)(1-y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y-1}{\ln(y)}\,g(y)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \mathbf{E}\left[\frac{Y-1}{\ln(Y)}\,g(Y)\right],
\end{aligned}$$

si bien que

$$\boxed{\mathbf{E}[X|Y] = \frac{Y-1}{\ln(Y)} \quad \text{p.s.}}$$

Procédons de la même manière pour $\mathbf{E}[Y|X]$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Yg(X)] = \int_{\mathbb{R}^2} yg(x)\,f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 g(x)\frac{c}{x}\Big(\int_0^x y\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}\,g(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{E}\left[\frac{X}{2}g(X)\right],
\end{aligned}$$

si bien que

$$\boxed{\mathbf{E}[Y|X] = \frac{X}{2} \quad \text{p.s.}}$$

Cette question a été en général bien traitée. J'ai assez souvent lu que la densité de la loi de X était la constante c, ce qui n'est pas possible, aucune fonction constante sur $\mathbb{R}$ n'étant la densité d'une loi de probabilité. Ce qui avait été oublié dans ces copies est l'indicatrice de l'intervalle $[0,1]$.
J'avais demandé de calculer la densité de la loi de X en premier pour que, constatant qu'elle vaut $c\mathbf{1}_{[0,1]}$, vous puissiez immédiatement en déduire que $c = 1$, mais très peu de gens l'ont vu. Cela n'avait heureusement pas d'incidence sur le calcul des espérances conditionnelles.

3. Déterminons la loi de K. Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\mathbf{P}(K = n) = \mathbf{P}(n \leqslant T < n+1) = \int_n^{n+1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-n}(1 - e^{-1}).$$

Soit maintenant $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Caculons $\mathbf{E}[e^{-T}g(K)]$. Nous trouvons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[e^{-T}g(K)] = \int_0^{+\infty} e^{-t}g(\lfloor t\rfloor)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \int_n^{n+1} e^{-t}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \frac{e^{-2n}(1-e^{-2})}{2} \\
&= \frac{1-e^{-2}}{2(1-e^{-1})} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}g(n)\, e^{-n}(1-e^{-1}) \\
&= \tfrac{1}{2}(1+e^{-1})\mathbf{E}[e^{-K}g(K)],
\end{aligned}$$

si bien que

$$\boxed{\mathbf{E}[e^{-T}|K] = \tfrac{1}{2}(1+e^{-1})e^{-K} \quad \text{p.s.}}$$

Cette question a aussi été plutôt bien traitée. Le seul point est que la réponse a été très souvent laissée écrite sous une forme très compliquée. Par exemple,

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}\mathbf{1}_{\{K=k\}}$$

n'est autre que e^{-K}.

4. Soit α un réel. Le vecteur aléatoire $(F, G + \alpha H)$ est gaussien, de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 2 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 2(1+\alpha+\alpha^2) \end{pmatrix}.$$

Soit a un réel. On a

$$\operatorname{Cov}\big(F + a(G+\alpha H), G + \alpha H\big) = 1 + \alpha + 2a(1+\alpha+\alpha^2)$$

et cette covariance est nulle pour

$$a = -\frac{1+\alpha}{2(1+\alpha+\alpha^2)}.$$

Pour cette valeur de a, les variables aléatoires $F + a(G + \alpha H)$ et $G + \alpha H$, qui sont d'une part deux composantes d'un vecteur gaussien et d'autre part de covariance nulle, sont indépendantes. Ainsi,

$$\mathbf{E}[F + a(G + \alpha H)|G + \alpha H] = \mathbf{E}[F + a(G + \alpha H)] = 0 \quad \text{p.s.}$$

Par ailleurs, cette même espérance conditionnelle vaut

$$\mathbf{E}[F + a(G + \alpha H)|G + \alpha H] = \mathbf{E}[F|G + \alpha H] + a(G + \alpha H) \quad \text{p.s.}$$

En comparant les deux expressions, on trouve

$$\boxed{\mathbf{E}[F|G + \alpha H] = \frac{1 + \alpha}{2(1 + \alpha + \alpha^2)} (G + \alpha H) \quad \text{p.s.}}$$

Cette question, simple dans son principe, donnait lieu à un calcul un peu désagréable, et n'a pas été très bien réussie.

Exercice 3

Barème indicatif : 10 points (2+2+3+3)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

On se donne une suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que

$$\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = \mathbf{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. On travaille désormais sur l'espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$.

On fixe un entier $a \in \mathbb{N}^*$. On pose $X_0 = a$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $X_n = a + \xi_1 + \ldots + \xi_n$. On définit

$$T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 0 \text{ ou } X_n = 3a\}.$$

On admettra que $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

2. Calculer la loi de X_T.

3. Montrer que $(X_n^2 - n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale et calculer l'espérance de T.

4. Montrer que $(X_n^3 - 3nX_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale et calculer $\mathbf{E}[T \,|\, X_T]$.

Solution de l'exercice 3

1. Il s'agit d'un exemple du cours. La variable aléatoire X_0 est constante, donc $\mathscr{F}_0$-mesurable. Pour tout $n \geqslant 1$, la variable aléatoire X_n est une fonction des variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_n$, donc elle est $\mathscr{F}_n$-mesurable. La suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est donc adaptée.

Pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire X_n est bornée par $a + n$, donc elle est intégrable.

Enfin, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbf{E}[X_n + \xi_{n+1}|\mathscr{F}_n] = X_n + \mathbf{E}[\xi_{n+1}] = X_n,$$

ce qui conclut la démonstration.

Cette question est une de celles qui ont été le mieux traitées, presque par tout le monde. Parfois manquait la vérification du fait que X_n est intégrable pour tout $n \geqslant 0$, qui est pourtant nécessaire à l'existence même de l'espérance conditionnelle.

2. Pour tout $n \geqslant 0$, l'événement $\{T \leqslant n\}$ s'écrit

$$\{T \leqslant n\} = \{1 \leqslant X_0 \leqslant 3a-1\} \cap \ldots \cap \{1 \leqslant X_n \leqslant 3a-1\},$$

ce qui montre qu'il appartient à $\mathscr{F}_n$. La variable aléatoire T est donc un temps d'arrêt.

La suite $(X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ est donc une martingale, et pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\mathbf{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbf{E}[X_0] = a.$$

Puisque T est fini presque sûrement, la suite $(X_{T\wedge n})$ converge presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, vers X_T, qui ne prend que deux valeurs, 0 et $3a$. Cette convergence presque sûre est dominée par la constante $3a$, donc par convergence dominée,

$$\mathbf{E}[X_T] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_{T\wedge n}] = a.$$

Par ailleurs,

$$\mathbf{E}[X_T] = 0\,\mathbf{P}(X_T = 0) + 3a\,\mathbf{P}(X_T = 3a),$$

d'où on déduit que

$$\mathbf{P}(X_T = 0) = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbf{P}(X_T = 3a) = \frac{1}{3}.$$

Curieusement, cette question a été un peu moins bien réussie que la suivante, qui était du même genre, mais plus compliquée.

L'erreur la plus fréquente a été une mauvaise utilisation du théorème de convergence dominée. D'abord, il faut dire, pour utiliser ce théorème, par quoi la suite est dominée. Ensuite, la variable aléatoire qu'on choisit pour dominer la suite doit être indépendante de n, et intégrable. Ainsi, ni $|X_{T\wedge n}| \leqslant a+n$ ni $|X_{T\wedge n}| \leqslant a+T$ ne sont des dominations qui permettent de conclure (certes, T est intégrable, mais on ne le sait pas encore à ce stade).

Une erreur moins fréquente a consisté à dire : puisque T est fini presque sûrement, on a $\mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[X_0]$. Un des points importants du cours, et des exemples qu'il contient, notamment celui de la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue de 1 et arrêtée lorsqu'elle atteint 0, est que cette affirmation n'est pas vraie.

3. Pour tout $n \geqslant 0$, la variable $X_n^2 - n$, qui est une fonction de X_n, est $\mathscr{F}_n$-mesurable. Cette variable est par ailleurs bornée par $(n+a)^2 + n$, donc intégrable. Enfin, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_{n+1}^2 - (n+1)|\mathscr{F}_n] &= \mathbf{E}[(X_n + \xi_{n+1})^2|\mathscr{F}_n] - (n+1) \\
&= \mathbf{E}[X_n^2 + 2X_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2|\mathscr{F}_n] - (n+1) \\
&= X_n^2 + 2X_n\mathbf{E}[\xi_{n+1}] + 1 - (n+1) \\
&= X_n^2 - n,
\end{aligned}$$

ce qui achève la vérification du fait que $(X_n^2 - n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

Le processus arrêté $(X_{T\wedge n} - (T\wedge n))_{n\geqslant 0}$ est donc aussi une martingale, et on a, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbf{E}[X_{T\wedge n}^2 - (T\wedge n)] = \mathbf{E}[X_0^2 - 0] = a^2,$$

c'est-à-dire
$$\mathbf{E}[X_{T\wedge n}^2] = \mathbf{E}[T\wedge n] + a^2.$$
Lorsque n tend vers l'infini, puisque T est fini presque sûrement, la suite $X_{T\wedge n}$ converge presque sûrement vers X_T. Cette convergence est dominée par $3a$, et le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_{T\wedge n}^2] = \mathbf{E}[X_T^2] = 3a^2.$$
Par ailleurs, la suite $(T\wedge n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de variables aléatoires positives qui converge presque sûrement vers T. Le théorème de convergence monotone nous permet donc de dire que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[T\wedge n] = \mathbf{E}[T].$$
En mettant nos résultats ensemble, on trouve que
$$\mathbf{E}[T] = 2a^2.$$

4. Pour chaque $n \geqslant 0$, la variable aléatoire $X_n^3 - 3nX_n$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable, et bornée par $(n+a)^3 + 3n(n+a)$, donc intégrable. De plus, pour tout $n \geqslant 0$,
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_{n+1}^3 - 3(n+1)X_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \mathbf{E}[X_n^3 + 3X_n^2\xi_{n+1} + 3X_n\xi_{n+1}^2 + \xi_{n+1}^3|\mathscr{F}_n] - 3(n+1)X_n \\
&= X_n^3 + 3X_n - 3(n+1)X_n \\
&= X_n^3 - 3nX_n,
\end{aligned}$$
ce qui montre que la suite $(X_n^3 - 3nX_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

En utilisant à nouveau le théorème d'arrêt, on trouve
$$\mathbf{E}[X_{T\wedge n}^3 - 3(T\wedge n)X_{T\wedge n}] = a^3.$$
Lorsque n tend vers l'infini, $X_{T\wedge n}$ converge presque sûrement vers X_T et $T\wedge n$ converge presque sûrement vers T, si bien que $X_{T\wedge n}^3 - 3(T\wedge n)X_{T\wedge n}$ converge presque sûrement vers $X_T^3 - 3TX_T$. Cette convergence est dominée par $27a^3 + 9aT$, qui est une variable aléatoire intégrable, puisque T est intégrable. Par convergence dominée, on a donc
$$\mathbf{E}[TX_T] = \frac{1}{3}(\mathbf{E}[X_T^3] - a^3) = \frac{8}{3}a^3.$$
Or
$$\mathbf{E}[TX_T] = \mathbf{E}[TX_T\mathbf{1}_{\{X_T=0\}}] + \mathbf{E}[TX_T\mathbf{1}_{\{X_T=3a\}}] = 3a\mathbf{E}[T\mathbf{1}_{\{X_T=3a\}}].$$
On a donc
$$\mathbf{E}[T\mathbf{1}_{\{X_T=3a\}}] = \frac{8}{9}a^2 \quad \text{et } \mathbf{E}[T\mathbf{1}_{\{X_T=0\}}] = \mathbf{E}[T] - \mathbf{E}[T\mathbf{1}_{\{X_T=3a\}}] = \frac{10}{9}a^2.$$
Puisque la variable aléatoire X_T ne prend que les deux valeurs 0 et $3a$, on a
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[T|X_T] &= \frac{\mathbf{E}[T\mathbf{1}_{\{X_T=0\}}]}{\mathbf{P}(X_T=0)}\mathbf{1}_{\{X_T=0\}} + \frac{\mathbf{E}[T\mathbf{1}_{\{X_T=3a\}}]}{\mathbf{P}(X_T=3a)}\mathbf{1}_{\{X_T=3a\}} \\
&= \frac{5a^2}{3}\mathbf{1}_{\{X_T=0\}} + \frac{8a^2}{3}\mathbf{1}_{\{X_T=3a\}} \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

La deuxième partie de cette question a été peu traitée.

Exercice 4

Barème indicatif : 12 points (4+4+2+2)

Sur un espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$, soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-martingale. On suppose qu'il existe un réel C tel que $\forall n \geqslant 0,\ \mathbf{E}\big[|X_n|\big] \leqslant C$. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $X_n^+ = \max(X_n, 0)$ la partie positive de X_n.

1. Montrer que $(X_n^+)_{n\geqslant 0}$ est une sous-martingale, puis que pour tous entiers $n, k \geqslant 0$,

$$\mathbf{E}[X_{n+k+1}^+ \,|\, \mathscr{F}_n] \geqslant \mathbf{E}[X_{n+k}^+ \,|\, \mathscr{F}_n] \geqslant 0 \quad \text{p.s.}$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on vient d'établir que la suite $\big(\mathbf{E}[X_{n+k}^+ \,|\, \mathscr{F}_n]\big)_{k\geqslant 0}$ est une suite presque sûrement croissante de variables aléatoires positives. Elle converge donc presque sûrement (on ne demande pas de le montrer) vers une variable aléatoire à valeurs dans $[0, \infty]$ qu'on note M_n :

$$M_n = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}[X_{n+k}^+ \,|\, \mathscr{F}_n] \quad \text{(limite presque sûre).}$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire M_n est intégrable, puis que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $Z_n = M_n - X_n$.

3. Montrer que $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une sur-martingale positive.

4. Soient $(M'_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale positive et $(Z'_n)_{n\geqslant 0}$ une sur-martingale positive telles que pour tout $n \geqslant 0$ on ait $X_n = M'_n - Z'_n$ p.s. Que peut-on dire ?

Solution de l'exercice 4

1. La fonction $x \mapsto x^+$ est à valeurs positives et inférieure à la fonction $x \mapsto |x|$, si bien que pour tout $n \geqslant 0$, $|X_n^+| = X_n^+ \leqslant |X_n|$, donc X_n^+ est intégrable.

De plus, la fonction $x \mapsto x^+$ est convexe est croissante, si bien que la suite $X^+ = (X_n^+)_{n\geqslant 0}$ est une sous-martingale.

Soient $n, k \geqslant 0$. Puisque X^+ est une sous-martingale,

$$\mathbf{E}[X_{n+k+1}^+|\mathscr{F}_{n+k}] \geqslant X_{n+k}^+ \text{ p.s.,}$$

donc par croissance de l'espérance conditionnelle sachant $\mathscr{F}_n$,

$$\mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X_{n+k+1}^+|\mathscr{F}_{n+k}]\big|\mathscr{F}_n\big] \geqslant \mathbf{E}[X_{n+k}^+|\mathscr{F}_n] \text{ p.s..}$$

Par propriété de tour de l'espérance conditionnelle, le membre de gauche vaut $\mathbf{E}[X_{n+k+1}^+|\mathscr{F}_n]$, et on a l'inégalité souhaitée.

Cet exercice en général, et cette question en particulier, ont été souvent mais mal traités. L'erreur fréquente la plus grave a consisté à distinguer des cas : "si $X_n \geqslant 0$, ... , et si $X_n < 0$, ..." Mais X_n est une fonction, et n'est en général ni positive ni négative : elle prend, a priori, à la fois des valeurs positives et des valeurs négatives.

Beaucoup de copies ont redémontré plus ou moins adroitement le résultat du cours qui permettait de conclure que $(X_n^+)_{n\geqslant 0}$ est une sous-martingale.

2. Soit $n \geqslant 0$ un entier. Appliquons le théorème de convergence monotone à la suite croissante dont M_n est la limite. Nous trouvons

$$\mathbf{E}[M_n] = \mathbf{E}\Big[\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}[X_{n+k}^+|\mathscr{F}_n]\Big] = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X_{n+k}^+|\mathscr{F}_n]\big] = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}[X_{n+k}^+].$$

Or pour tout $p \geqslant 0$, on a $\mathbf{E}[X_p^+] \leqslant \mathbf{E}\big[|X_p|\big] \leqslant C$. Il s'ensuit que

$$\mathbf{E}[M_n] \leqslant C < \infty,$$

donc M_n est intégrable.

Montrons maintenant que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale. Pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire M_n est intégrable, nous venons de le montrer, et elle est la limite presque sûre d'une suite de variables aléatoires $\mathscr{F}_n$-mesurables. Elle est donc $\mathscr{F}_n$-mesurable.

Fixons maintenant $n \geqslant 0$ et montrons que $\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n] = M_n$. Pour cela, calculons $\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n]$ en utilisant le théorème de convergence monotone conditionnel :

$$\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbf{E}\Big[\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}[X_{n+1+k}^+|\mathscr{F}_{n+1}]\Big|\mathscr{F}_n\Big] = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X_{n+1+k}^+|\mathscr{F}_{n+1}]\big|\mathscr{F}_n\big],$$

les limites étant des limites presque sûres. Par la propriété de tour de l'espérance conditionnelle, on a pour tout $k \geqslant 0$

$$\mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X_{n+1+k}^+|\mathscr{F}_{n+1}]\big|\mathscr{F}_n\big] = \mathbf{E}[X_{n+1+k}^+|\mathscr{F}_n],$$

si bien que

$$\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}[X_{n+1+k}^+|\mathscr{F}_n] = M_n,$$

ce qui achève de montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

Dans cette question, j'ai souvent vu des confusions entre les assertions $\mathbf{E}[|X_n|] \leqslant C$ et $|X_n| \leqslant C$. La deuxième entraîne la première, mais la première (qui était supposée vraie) n'entraîne pas la seconde (qui n'avait donc pas de raison d'être vraie).

3. Les suites $(M_n)_{n\geqslant 0}$ et $(-X_n)_{n\geqslant 0}$ sont des sur-martingales, donc leur somme $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est également une sur-martingale.

Nous voulons de plus montrer que pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire Z_n est positive, c'est-à-dire que $M_n \geqslant X_n$ presque sûrement. Or pour tout $k \geqslant 0$, puisque X^+ est une sous-martingale, on a

$$\mathbf{E}[X_{n+k}^+|\mathscr{F}_n] \geqslant X_n^+ = \max(X_n, 0) \geqslant X_n.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on trouve l'inégalité souhaitée.

4. Soit $n \geqslant 0$. L'égalité $X_n = M'_n - Z'_n$ et le fait que M'_n et Z'_n soient positives entraîne que $M'_n = X_n + Z'_n \geqslant X_n$ et $M'_n \geqslant 0$, donc que $M'_n \geqslant \max(X_n, 0) = X_n^+$.

Pour tout $k \geqslant 0$, on a donc

$$\mathbf{E}[X_{n+k}^+|\mathscr{F}_n] \leqslant \mathbf{E}[M'_{n+k}|\mathscr{F}_n] = M'_n$$

et en faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité $\mathbf{E}[X_{n+k}^+|\mathscr{F}_n] \leqslant M'_n$, on trouve $M_n \leqslant M'_n$ p.s.. De plus, on a $Z_n = M_n - X_n \leqslant M'_n - X_n = Z'_n$ p.s.. Finalement, on a, pour tout $n \geqslant 0$,

$$M_n \leqslant M'_n \quad \text{et} \quad Z_n \leqslant Z'_n \text{ p.s.}$$

La décomposition $X_n = M_n - Z_n$ est donc l'écriture la plus économique d'une sous-martingale bornée dans L^1 comme différence d'une martingale positive et d'une sur-martingale positive.

Cette dernière question n'a été comprise par aucune des personnes qui l'ont abordée, elle était peut-être mal formulée.

Fin du sujet