

Partiel

*L'épreuve dure deux heures.
Les quatre exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
La note finale sera sur 30 points.*

Exercice 1

Barème indicatif : 6 points (3+3)

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On fait l'hypothèse suivante :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbf{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbf{E}[Y\mathbf{1}_A].$$

Montrer que $X = Y$ p.s.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite adaptée de variables aléatoires réelles sur un espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbf{P})$. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}$$

est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 2

Barème indicatif : 12 points (3+3+3+3)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. Soient M et N deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1. Déterminer une fonction $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{E}[MN \mid M + N] = h(M + N)$ p.s.

2. On note $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ la densité

$$f : (x, y) \mapsto \frac{c}{x} \mathbf{1}_\Delta(x, y),$$

où c est un réel positif.

Calculer la loi de X , la loi de Y , puis $\mathbf{E}[X \mid Y]$ et $\mathbf{E}[Y \mid X]$.

3. Soit T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $K = \lfloor T \rfloor$ la partie entière de T .

Calculer $\mathbf{E}[e^{-T} \mid K]$.

4. Soit (F, G, H) un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout réel α , calculer $\mathbf{E}[F \mid G + \alpha H]$.

Exercice 3

Barème indicatif : 10 points (2+2+3+3)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

On se donne une suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que

$$\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = \mathbf{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. On travaille désormais sur l'espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbf{P})$.

On fixe un entier $a \in \mathbb{N}^*$. On pose $X_0 = a$ et, pour tout $n \geq 1$, $X_n = a + \xi_1 + \dots + \xi_n$.

On définit

$$T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ou } X_n = 3a\}.$$

On admettra que $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.
2. Calculer la loi de X_T .
3. Montrer que $(X_n^2 - n)_{n \geq 0}$ est une martingale et calculer l'espérance de T .
4. Montrer que $(X_n^3 - 3nX_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et calculer $\mathbf{E}[T \mid X_T]$.

Exercice 4

Barème indicatif : 12 points (4+4+2+2)

Sur un espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbf{P})$, soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale. On suppose qu'il existe un réel C tel que $\forall n \geq 0$, $\mathbf{E}[|X_n|] \leq C$. Pour tout $n \geq 0$, on note $X_n^+ = \max(X_n, 0)$ la partie positive de X_n .

1. Montrer que $(X_n^+)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale, puis que pour tous entiers $n, k \geq 0$,

$$\mathbf{E}[X_{n+k+1}^+ \mid \mathcal{F}_n] \geq \mathbf{E}[X_{n+k}^+ \mid \mathcal{F}_n] \geq 0 \quad \text{p.s.}$$

Pour tout $n \geq 0$, on vient d'établir que la suite $(\mathbf{E}[X_{n+k}^+ \mid \mathcal{F}_n])_{k \geq 0}$ est une suite presque sûrement croissante de variables aléatoires positives. Elle converge donc presque sûrement (on ne demande pas de le montrer) vers une variable aléatoire à valeurs dans $[0, \infty]$ qu'on note M_n :

$$M_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_{n+k}^+ \mid \mathcal{F}_n] \quad (\text{limite presque sûre}).$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, la variable aléatoire M_n est intégrable, puis que la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

Pour tout $n \geq 0$, on pose $Z_n = M_n - X_n$.

3. Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une sur-martingale positive.
4. Soient $(M'_n)_{n \geq 0}$ une martingale positive et $(Z'_n)_{n \geq 0}$ une sur-martingale positive telles que pour tout $n \geq 0$ on ait $X_n = M'_n - Z'_n$ p.s. Que peut-on dire ?