Examen

L'épreuve dure trois heures.
Les quatre exercices sont indépendants.
Ni documents, ni appareils électroniques.
La note finale sera sur 50 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

1. Soit $p \in [0,1]$ un réel. Soient $n, m \geqslant 1$ des entiers. Soient A, B des variables aléatoires indépendantes de lois binomiales, respectivement $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$.

Calculer $\mathbf{E}[A \,|\, A+B]$.

2. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 1 - |x|\}$. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ la densité

$$f : (x,y) \mapsto c\, x^2 y^2 \; \mathbf{1}_D(x,y),$$

où c est un réel positif.

Calculer $\mathbf{E}[X \,|\, Y]$ et $\mathbf{E}[Y \,|\, X]$.

3. Soit T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $U = T - \lfloor T \rfloor$ la partie fractionnaire de T.

Calculer $\mathbf{E}[T \,|\, U]$.

4 . Soit (F,G,H) un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $\mathbf{E}[F+G \,|\, G+H]$.

5. Soient K, L, M des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, qu'on suppose intégrables.

Calculer $\mathbf{E}\big[K \,\big|\, \mathbf{E}[K+L \,|\, K+L+M]\big]$ et $\mathbf{E}\big[K+L+M \,\big|\, \mathbf{E}[K+L \,|\, K]\big]$.

Exercice 2

Barème indicatif : 20 points (3+3+3+3+2+3+3)

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$.

1. Soit Z une variable aléatoire positive. Montrer d'une part que pour tout $\omega \in \Omega$ on a

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{Z\geqslant a\}}(\omega)\,\mathrm{d}a = Z(\omega) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty a\mathbf{1}_{\{Z\geqslant a\}}(\omega)\,\mathrm{d}a = \tfrac{1}{2}Z^2(\omega),$$

et d'autre part que

$$\int_0^\infty a\mathbf{P}(Z \geqslant a)\,\mathrm{d}a = \tfrac{1}{2}\mathbf{E}[Z^2].$$

On se donne une martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$Y_n = |X_n| \ \text{ et } \ M_n = \max(Y_0, \dots, Y_n).$$

2. Soit a un réel positif. On note $T = \inf\{n \geqslant 0 : Y_n \geqslant a\}$, avec la convention habituelle selon laquelle $\inf \varnothing = \infty$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$a\mathbf{P}(M_n \geqslant a) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}\big[Y_k \mathbf{1}_{\{T=k\}}\big].$$

3. En déduire que pour tout réel positif a et tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$a\mathbf{P}(M_n \geqslant a) \leqslant \mathbf{E}\big[Y_n \mathbf{1}_{\{M_n\geqslant a\}}\big].$$

4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$\mathbf{E}\big[M_n^2\big] \leqslant 4\mathbf{E}\big[X_n^2\big].$$

On suppose désormais que la martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans L^2, c'est-à-dire qu'il existe un réel C tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, on ait $\mathbf{E}\big[X_n^2\big] \leqslant C$.

5. Montrer que la martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans L^1.

La suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc presque sûrement (on ne demande pas de le démontrer) vers une limite que l'on notera X_∞.

6. Montrer que la variable aléatoire

$$M = \sup\big\{|X_n|, n \geqslant 0\big\}$$

est de carré intégrable. Que peut-on en déduire sur la convergence de $(X_n)_{n\geqslant 0}$ vers X_∞ ?

7. On vient de démontrer que si la martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans L^2, alors la variable aléatoire $M = \sup\big\{|X_n|, n \geqslant 0\big\}$ appartient à L^2. Cette assertion reste-t-elle vraie si l'on remplace L^2 par L^1 ?

Autrement dit : est-il vrai que si la martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans L^1, alors la variable aléatoire $M = \sup\big\{|X_n|, n \geqslant 0\big\}$ appartient à L^1 ?

Si vous pensez que oui, donnez une démonstration, et si vous pensez que non, donnez un contre-exemple et démontrez que c'en est un.

Exercice 3

Barème indicatif : 20 points (2+3+3+3+3+3+3)

Soit E un espace d'états, dont on suppose qu'il a au moins deux éléments. Soit P un noyau de transition irréductible sur E.

Pour tout $x \in E$, on définit $\widetilde{P}(x,x) = 0$, et pour tout $y \in E$ tel que $y \neq x$,

$$\widetilde{P}(x,y) = \frac{P(x,y)}{1 - P(x,x)}.$$

1. Montrer que $\widetilde{P}$ est un noyau de transition sur E.

On considère la chaîne de Markov canonique $(E^{\mathbb{N}}, \mathscr{C}, (\mathscr{C}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbf{P}_x)_{x\in E}, X = (X_n)_{n\geqslant 0})$ associée au noyau P. On définit les variables aléatoires $T_0 = 0$ et, pour tout $k \geqslant 0$,

$$T_{k+1} = \inf\big\{n > T_k : X_n \neq X_{n-1}\big\}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in E$, la variable aléatoire T_1 est finie $\mathbf{P}_x$-presque sûrement.

3. Montrer que pour tout $k \geqslant 0$, la variable aléatoire T_k est un temps d'arrêt. On pourra commencer par montrer que si S est un temps d'arrêt, alors $T = \inf\{n > S : X_n \neq X_{n-1}\}$ est un temps d'arrêt.

4. Soit $x \in E$. En admettant la relation

$$\forall k \geqslant 0, \quad T_{k+1} = (T_k + T_1 \circ \theta_{T_k})\, \mathbf{1}_{\{T_k<\infty\}} + \infty\, \mathbf{1}_{\{T_k=\infty\}},$$

montrer que pour tout $k \geqslant 0$, la variable aléatoire T_k est finie $\mathbf{P}_x$-presque sûrement.

5. Soit $x \in E$. Montrer que sous $\mathbf{P}_x$, la suite $(X_{T_k})_{k\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur E issue de x et de noyau de transition $\widetilde{P}$.

6. Montrer que si $\widetilde{P}$ est transient, alors P est transient.

7. Soit $d \geqslant 3$ un entier. On suppose que $E = \mathbb{Z}^d$ et que le noyau de transition P est celui de la marche aléatoire simple symétrique, défini en posant, pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$,

$$P(x,y) = \frac{1}{2d} \text{ si } \|x-y\| = 1, \quad \text{et } P(x,y) = 0 \text{ sinon},$$

où la norme est la norme euclidienne usuelle. On admettra que P est irréductible.

On définit l'application $\pi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^3$ en posant, pour tout $x = (x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{Z}^d$,

$$\pi(x^1, \ldots, x^d) = (x^1, x^2, x^3).$$

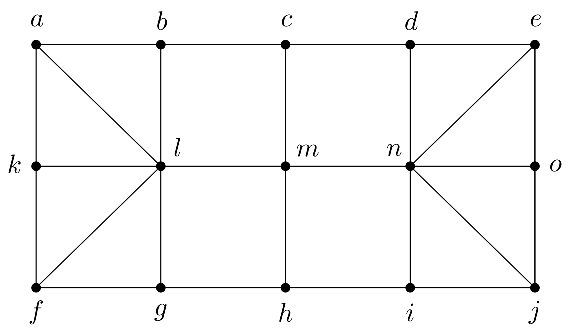
On admettra que pour tout $x \in E$, la suite $(\pi(X_n))_{n\geqslant 0}$ est sous $\mathbf{P}_x$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^3$, dont le noyau de transition, noté Q, ne dépend pas de x.

Calculer le noyau Q puis le noyau $\widetilde{Q}$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On étudie la marche aléatoire sur le graphe représenté ci-dessous.



1. Montrer que cette marche aléatoire admet une unique mesure de probabilité invariante, qu'on notera π, et calculer $\pi(a)$, $\pi(l)$ et $\pi(m)$.

2. On fait partir la marche aléatoire de l'état n. Après combien de temps en moyenne la marche aléatoire revient-elle en n pour la première fois ?

3. On fait partir la marche aléatoire de l'état k. Combien de fois en moyenne la marche visite-t-elle le sommet l avant de revenir pour la première fois à son point de départ ?

4. Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire issue de c. Posons $M = \{l, m, n\}$. La quantité

$$\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{1}_M(X_i)$$

admet-elle sous $\mathbf{P}_c$ une limite presque sûre lorsque t tend vers l'infini, et si oui laquelle ?

5. Soit u une fonction à valeurs réelles sur l'ensemble des sommets de notre graphe. La quantité

$$\mathbf{E}_a[u(X_t)]$$

admet-elle une limite lorsque t tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

Fin du sujet