Partiel

L'épreuve dure deux heures.
Les quatre exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
La note finale sera sur 30 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 4 points (2+2)

1. Donner la définition d'une martingale sur un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application mesurable bornée. Donner une expression de l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[f(X,Y) \,|\, Y]$.

Solution de l'exercice 1

Ce sont des questions de cours.

Dans la première question, quelques personnes ont lu trop vite et cru qu'il était demandé de donner la définition d'une filtration.

Dans la deuxième question, une réponse possible était (en notant P_X la loi de X)

$$\mathbf{E}[f(X,Y) \,|\, Y] = \int_{\mathbb{R}} f(x, Y)\, \mathrm{d}P_X(x)$$

et une autre réponse possible était

$$\mathbf{E}[f(X,Y) \,|\, Y] = h(Y), \text{ où } h(y) = \mathbf{E}[f(X,y)].$$

Certains se sont un peu emmêlés entre x, X, y et Y.

Exercice 2

Barème indicatif : 14 points (3+3+4+4)

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, justifier que la variable aléatoire Y_n est dans $\mathbf{L}^1$ et qu'elle est indépendante de X_{n+1}.

2. Expliquer pourquoi, pour tout $n \geqslant 1$, on a l'égalité

$$Y_{n+1} = Y_n + (X_{n+1} - Y_n)\,\mathbf{1}_{\{X_{n+1} > Y_n\}}\,.$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, démontrer soigneusement qu'on a l'égalité

$$\mathbf{E}[Y_{n+1}\,|\,Y_n] = Y_n + \mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n\,|\,Y_n)\,.$$

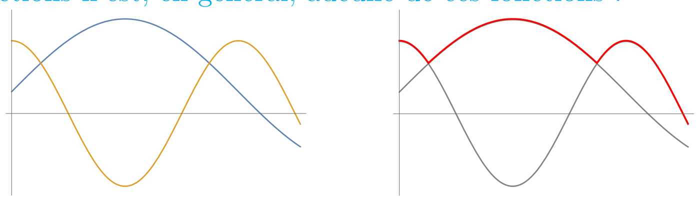
On rappelle que $\mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n\,|\,Y_n)$ désigne $\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{X_{n+1}>Y_n\}}\,|\,Y_n]$.

4. En déduire une relation de récurrence faisant intervenir $\mathbf{E}[Y_n]$ et $\mathbf{E}[Y_{n+1}]$, puis calculer la valeur de $\mathbf{E}[Y_n]$.

Solution de l'exercice 2

1. L'inégalité $|Y_n| \leqslant |X_1| + \ldots + |X_n|$ montre que Y_n est intégrable. De plus, Y_n, qui est une fonction de $X_1, \ldots, X_n$, est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ qui, en vertu du théorème de regroupement, est indépendante de $\sigma(X_{n+1})$. Ainsi, Y_n est indépendante de X_{n+1}.

La réponse “Il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $Y_n = X_k$, or X_k est intégrable, donc Y_n est intégrable.”, que j'ai lue plusieurs fois, contient une erreur de raisonnement. En effet, le maximum d'une famille de fonctions n'est, en général, aucune de ces fonctions :



2. Soit $n \geqslant 1$. Soit $\omega \in \Omega$. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $X_k(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. Alors $Y_n(\omega) = X_k(\omega)$.

Si $X_{n+1}(\omega) \leqslant Y_n(\omega)$, alors $X_k(\omega)$ est encore le plus grand nombre parmi $X_1(\omega), \ldots, X_{n+1}(\omega)$, et $Y_{n+1}(\omega) = X_k(\omega) = Y_n(\omega)$. La fomule est donc bien vérifiée lorsqu'on l'évalue en cet ω, car l'indicatrice y est nulle.

En revanche, si $X_{n+1}(\omega) \geqslant Y_n(\omega)$, alors $Y_{n+1}(\omega) = X_{n+1}(\omega)$, et la formule est également vérifiée lorsqu'on l'évalue en cet ω.

Finalement, les fonctions qui figurent de part et d'autre du signe $=$ prennent bien la même valeur en tout point : elles sont égales.

3. Les variables aléatoires Y_n, Y_{n+1}, $X_{n+1} - Y_n$ sont intégrables, et l'indicatrice est bornée : toutes les variables aléatoires qui figurent dans l'égalité établie à la question précédente sont donc intégrables. On peut donc prendre l'espérance conditionnelle de cette égalité sachant la tribu engendrée par Y_n. On trouve

$$\mathbf{E}[Y_{n+1}\,|\,Y_n] = \mathbf{E}[Y_n\,|\,Y_n] + \underbrace{\mathbf{E}[(X_{n+1} - Y_n)\mathbf{1}_{\{X_{n+1}>Y_n\}}\,|\,Y_n]}_{1}\,.$$

Dans le membre de gauche, nous avons ce que nous voulons. Le premier terme du membre de droite est égal à Y_n. Il faut calculer le deuxième terme du membre de droite. Par linéarité de l'espérance conditionnelle, il vaut

$$1 = \mathbf{E}[X_{n+1}\mathbf{1}_{\{X_{n+1}>Y_n\}}\,|\,Y_n] - \underbrace{\mathbf{E}[Y_n\mathbf{1}_{\{X_{n+1}>Y_n\}}\,|\,Y_n]}_{2}.$$

Le deuxième terme vaut, en factorisant Y_n qui est mesurable par rapport à la tribu engendrée par Y_n,

$$2 = Y_n\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{X_{n+1}>Y_n\}}\,|\,Y_n] = -Y_n\mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n\,|\,Y_n).$$

Il reste à calculer $\mathbf{E}[X_{n+1}\mathbf{1}_{\{X_{n+1}>Y_n\}}\,|\,Y_n]$. Il s'agit, à un détail près, d'une instance de la situation examinée à la question 2 de l'exercice 1. En effet, définissons $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant $g(x, y) = x\,\mathbf{1}_{\{x>y\}}$. C'est une fonction mesurable, qui n'est pas bornée, mais qui est telle que $g(X_{n+1}, Y_n)$ est intégrable, et nous cherchons à calculer $\mathbf{E}[g(X_{n+1}, Y_n)|Y_n]$, sachant de plus que X_{n+1} et Y_n sont indépendantes. Nous savons alors que

$$\mathbf{E}[g(X_{n+1}, Y_n)|Y_n] = h(Y_n), \quad \text{où} \quad h(y) = \mathbf{E}[g(X_{n+1}, y)].$$

Calculons donc la fonction h :

$$h(y) = \mathbf{E}[X_{n+1}\mathbf{1}_{\{X_{n+1}>y\}}] = \int_y^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[(-1-x)e^{-x}\big]_y^{\infty} = (y+1)e^{-y}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[g(X_{n+1}, Y_n)|Y_n] = (Y_n + 1)e^{-Y_n}.$$

Par ailleurs, une deuxième application du même résultat nous montre que

$$\mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n|Y_n) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{X_{n+1}>Y_n\}}\,|\,Y_n] = k(Y_n),$$

où $k(y) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{X_{n+1}>y\}}] = \mathbf{P}(X_{n+1} > y) = e^{-y}$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n|Y_n) = e^{-Y_n}.$$

Finalement,

$$\mathbf{E}[X_{n+1}\mathbf{1}_{\{X_{n+1}>Y_n\}}\,|\,Y_n] = (Y_n + 1)\mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n|Y_n)$$

et nous aboutissons à

$$1 = \mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n|Y_n),$$

et donc à l'égalité attendue.

4. Prenons l'espérance de l'égalité que nous venons de démontrer. Nous trouvons

$$\mathbf{E}[Y_{n+1}] = \mathbf{E}[Y_n] + \mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n).$$

Il reste à calculer la probabilité qui apparaît dans le membre de droite. On peut l'écrire

$$\mathbf{P}(X_{n+1} > \max(X_1, \ldots, X_n)) = \mathbf{E}[f(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})],$$

où l'on a défini $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \mathbf{1}_{\{x_{n+1} > \max(x_1, \ldots, x_n)\}}.$$

Or comme $X_1, \ldots, X_{n+1}$ sont identiquement distribuées, le vecteur $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ a, pour tout i entre 1 et n, même loi que le vecteur

$$(X_{i+1}, \ldots, X_{n+1}, X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i),$$

donc

$$\mathbf{P}(X_{n+1} > \max(X_1, \ldots, X_n)) = \mathbf{P}(\underbrace{X_i > \max(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{n+1})}_{A_i}).$$

Les événements $A_1, \ldots, A_{n+1}$ sont deux à deux disjoints, ont tous la même probabilité, et leur union est l'événement où l'un des nombres $X_1, \ldots, X_{n+1}$ est strictement supérieur à tous les autres. Le complémentaire de leur union est donc inclus dans l'événement où au moins deux nombres parmi $X_1, \ldots, X_{n+1}$ sont égaux, qui est de mesure nulle :

$$\big(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}\big)^c \subseteq \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \{X_i = X_j\},$$

et $\mathbf{P}(X_i = X_j)$ est égale à la masse de la diagonale du plan $\mathbb{R}^2$ pour la mesure de densité $(x, y) \mapsto e^{-x-y}\mathbf{1}_{x,y \geqslant 0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue, donc cette probabilité est nulle.

Finalement, l'union $A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}$ est de probabilité 1, et on a, pour tout i entre 1 et $n+1$, $\mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{n+1}$.

Finalement, la relation entre les espérances des variables aléatoires Y_n devient

$$\mathbf{E}[Y_{n+1}] = \mathbf{E}[Y_n] + \tfrac{1}{n+1}.$$

Puisque $Y_1 = X_1$, on a $\mathbf{E}[Y_1] = 1$, et la relation de récurrence se résout en

$$\mathbf{E}[Y_n] = 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k}.$$

J'ai lu plusieurs fois l'égalité incorrecte

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n) &= \mathbf{P}(X_{n+1} > X_1, \ldots, X_{n+1} > X_n) \\ &= \mathbf{P}(X_{n+1} > X_1) \ldots \mathbf{P}(X_{n+1} > X_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} > X_1)^n. \end{aligned}$$

L'égalité rouge est en effet fausse, les événements $\{X_{n+1} > X_1\}, \ldots, \{X_{n+1} > X_n\}$ n'étant pas indépendants. Intuitivement, le fait que l'un d'entre eux soit réalisé indique que X_{n+1} prend une valeur “plutôt grande”, et donc que les autres événements ont plutôt plus de chance de se produire. Autrement dit, ces événements sont positivement corrélés, et en effet,

$$\frac{2}{3} = \mathbf{P}(X_3 > X_1 | X_3 > X_2) > \mathbf{P}(X_3 > X_1) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3

Barème indicatif : 6 points (3+3)

1. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de dimension 2, de loi uniforme dans le demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$. Autrement dit, la loi de (X, Y) admet par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ la densité $f(x, y) = \frac{2}{\pi}\mathbf{1}_D(x, y)$. Calculer $\mathbf{E}[Y \mid X]$.

2. Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On définit $T = \lfloor Z \rfloor$, la partie entière de Z. Calculer $\mathbf{E}[Z \mid T]$.

Solution de l'exercice 3

1. Commençons par calculer la loi de X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \tfrac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\mathbf{1}_D(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \tfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

La loi de X admet donc par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la densité $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

Soit maintenant $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Calculons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Yg(X)] &= \tfrac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} yg(x)\mathbf{1}_D(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \tfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} g(x)\Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} g(x)\tfrac{1}{2}(1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} g(x)\tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\ \tfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathbf{E}\big[\tfrac{1}{2}\sqrt{1-X^2}g(X)\big].
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[Y|X] = \tfrac{1}{2}\sqrt{1-X^2}.$$

2. Calculons la loi de T. On a, pour tout n entier naturel,

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(n \leqslant Z < n+1) = \int_n^{n+1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{-n}(1-e^{-1}).$$

Soit maintenant $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Calculons

$$\mathbf{E}[Zg(T)] = \int_0^{+\infty} xg(\lfloor x \rfloor)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} xg(\lfloor x \rfloor)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\int_n^{n+1} xe^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Or

$$\int_n^{n+1} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[(-1-x)e^{-x}\Big]_n^{n+1} = e^{-n}(1-e^{-1})\big(n + \tfrac{e-2}{e-1}\big).$$

Donc

$$\mathbf{E}[Zg(T)] = \mathbf{E}\big[(T + \tfrac{e-2}{e-1})g(T)\big].$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[Z \,|\, T] = T + \tfrac{e-2}{e-1}.$$

Exercice 4

Barème indicatif : 16 points (3+3+2+2+2+2+2)

Soit $p \in \,]0,1[$. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1-p$. On définit la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Soit ℓ un entier strictement positif fixé. On définit les variables aléatoires

$$T^+ = \inf\{n \geqslant 0 \,:\, S_n = \ell\} \qquad \text{et} \qquad T^- = \inf\{n \geqslant 0 \,:\, S_n = -\ell\},$$

avec la convention usuelle $\inf \varnothing = \infty$. On pose enfin $T = T^+ \wedge T^-$. Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $T(\omega) = \min(T^+(\omega), T^-(\omega))$. L'objectif de cet exercice est de calculer $\mathbf{E}[T]$ et $\mathbf{P}(T^+ < T^-)$.

1. Démontrer que T^+, T^- et T sont des temps d'arrêt.

2. On introduit l'événement $A = \bigcup_{k\geqslant 1} \{X_{2k\ell+1} = 1, X_{2k\ell+2} = 1, \ldots, X_{2k\ell+2\ell} = 1\}$. Montrer que $A \subseteq \{T < +\infty\}$. En déduire que T est fini presque sûrement.

3. **a.** Démontrer qu'il existe une unique valeur de p pour laquelle la suite $(S_n^2 - n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

b. Calculer $\mathbf{E}[T]$ pour cette valeur de p.

c. Que vaut $\mathbf{P}(T^+ < T^-)$ pour cette valeur de p ?

4. On suppose maintenant $p \in \,]0,1[$ arbitraire avec $p \neq \frac{1}{2}$.

a. Trouver un réel $r \neq 1$ tel que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $Z_n = r^{S_n}$ soit une martingale, puis calculer $\mathbf{P}(T^+ < T^-)$.

b. Démontrer brièvement que $(S_n - n(2p-1))_{n\geqslant 0}$ est une martingale et déterminer la valeur de $\mathbf{E}[T]$.

Solution de l'exercice 4

1. La démonstration que T^+ et T^- sont des temps d'arrêts est une question de cours. Le minimum de deux temps d'arrêt étant encore un temps d'arrêt, T est un temps d'arrêt.

2. Pour tout $k \geqslant 1$, notons

$$B_k = \{X_{2k\ell+1} = 1, X_{2k\ell+2} = 1, \ldots, X_{2k\ell+2\ell} = 1\}.$$

Soit $\omega \in B_k$. Montrons que $T(\omega) \leqslant 2k\ell + 2\ell$. Si $T(\omega) \leqslant 2kl$, c'est vrai. Sinon, on a $-\ell < S_{2k\ell} < \ell$ et $S_{2k\ell+2\ell} = S_{2k\ell} + 2\ell > -\ell + 2\ell = \ell$. Ainsi, $T^+(\omega) \leqslant 2k\ell + 2\ell$ et $T(\omega) \leqslant 2k\ell + 2\ell$.

Si $\omega \in A$, alors il existe $k \geqslant 1$ tel que $\omega \in B_k$, et $T(\omega)$ est fini. Autrement dit, $A \subseteq \{T < \infty\}$.

Montrons que $\mathbf{P}(A) = 1$. Pour cela, montrons que $\mathbf{P}(A^c) = 0$. En effet, en utilisant la propriété de convergence monotone de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(A^c) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k\geqslant 1} B_k^c\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big).$$

Or les événements $(B_k)_{k\geqslant 1}$ sont indépendants, donc

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big) = \prod_{k=1}^{n}(1 - \mathbf{P}(B_k))$$

et comme ils ont tous la même probabilité,

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big) = (1 - \mathbf{P}(B_1))^n = (1 - p^{2\ell})^n.$$

Finalement, comme $p > 0$,

$$\mathbf{P}(A^c) = \lim_{n\to\infty} (1 - p^{2\ell})^n = 0.$$

Le temps d'arrêt T est donc fini presque sûrement.

Il est important de bien voir que même si l'événement B_k est réalisé, on peut très bien avoir $S_{2k\ell+2\ell} < \ell$. Seulement, si cela se produit, alors $S_{2k\ell} < 0$, et $T \leqslant 2k\ell < \infty$.

3. a. Pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire S_n est bornée par n, donc de carré intégrable. On peut calculer

$$\mathbf{E}[S_{n+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_n] = \mathbf{E}[(S_n + X_{n+1})^2 \,|\, \mathscr{F}_n] = S_n^2 + 2S_n\mathbf{E}[X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n] + 1 = S_n^2 + 2(2p-1)S_n + 1.$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[(S_{n+1}^2 - (n+1)) \,|\, \mathscr{F}_n] = S_n^2 - n + 2(2p-1)S_n.$$

La seule valeur de p pour laquelle le membre de droite est égal à $S_n^2 - n$ est $p = \frac{1}{2}$.

b. Le processus arrêté $(S_{T\wedge n}^2 - T \wedge n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale, donc pour tout n on a

$$0 = \mathbf{E}[S_0^2 - 0] = \mathbf{E}[S_{T\wedge n}^2 - T \wedge n],$$

donc

$$\mathbf{E}[S_{T\wedge n}^2] = \mathbf{E}[T \wedge n].$$

Lorsque n tend vers l'infini, $T \wedge n$ converge presque sûrement vers T, en croissant, donc le théorème de convergence monotone assure que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[T \wedge n] = \mathbf{E}[T],$$

que cette espérance soit finie ou infinie (ce que nous ne savons pas encore).

Par ailleurs, puisque T est fini presque sûrement (ce qui ne garantit pas, au passage, qu'il soit d'espérance finie), $S^2_{T\wedge n}$ converge presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, vers S^2_T. De plus, cette convergence est dominée par ℓ, par définition de T. Ainsi, le théorème de convergence dominée nous permet de conclure que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S^2_{T\wedge n}] = \mathbf{E}[S^2_T].$$

Enfin, puisque $S_T = \pm\ell$, on a $S^T_2 = \ell^2$. Finalement,

$$\mathbf{E}[T] = \ell^2.$$

c. Le processus arrêté $(S_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ est une martingale, donc pour tout n on a

$$0 = \mathbf{E}[S_0] = \mathbf{E}[S_{T\wedge n}].$$

Comme précédemment, le fait que T soit fini presque sûrement entraîne que $S_{T\wedge n}$ converge presque sûrement vers S_T, et cette convergence est dominée par ℓ. Ainsi,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbf{E}[S_T].$$

Or $\mathbf{E}[S_T] = \ell\mathbf{P}(S_T = \ell) + (-\ell)\mathbf{P}(S_T = -\ell)$. Ainsi, $\mathbf{P}(S_T = \ell) = \mathbf{P}(S_T = -\ell) = \frac{1}{2}$, et

$$\mathbf{P}(T^+ < T^-) = \mathbf{P}(T = T^+) = \mathbf{P}(S_T = \ell) = \tfrac{1}{2}.$$

4. a. On a $|Z_n| \leqslant \max(|r|^n, |r|^{-n})$, donc Z_n est bornée, donc intégrable. Calculons

$$\mathbf{E}[Z_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbf{E}[Z_n r^{X_{n+1}}|\mathscr{F}_n] = Z_n\mathbf{E}[r^{X_{n+1}}] = Z_n(pr + (1-p)r^{-1}).$$

On cherche r tel que $pr + (1-p)r^{-1} = 1$. Ceci impose $r = 1$ ou $r = \frac{1-p}{p}$.

b. Comme à la question précédente, on a

$$1 = \mathbf{E}[Z_0] = \mathbf{E}[Z_{T\wedge n}] = \mathbf{E}[r^{S_{T\wedge n}}].$$

Quand n tend vers l'infini, $r^{S_{T\wedge n}}$ converge presque sûrement vers r^{S_T} en étant dominé par $\max(r^\ell, r^{-\ell})$. Ainsi, par convergence dominée,

$$1 = \mathbf{E}[r^{S_T}] = \mathbf{P}(S_T = \ell)r^\ell + \mathbf{P}(S_T = -\ell)r^{-\ell}.$$

On a donc

$$1 = \mathbf{P}(S_T = \ell)(r^\ell - r^{-\ell}) + r^{-\ell},$$

donc

$$\mathbf{P}(T^+ < T^-) = \mathbf{P}(S_T = \ell) = \frac{1 - r^{-\ell}}{r^\ell - r^{-\ell}} = \frac{(1-p)^\ell - p^\ell}{(1-p)^\ell}\frac{p^\ell(1-p)^\ell}{(1-p)^{2\ell} - p^{2\ell}} = \frac{p^\ell}{(1-p)^\ell + p^\ell}.$$

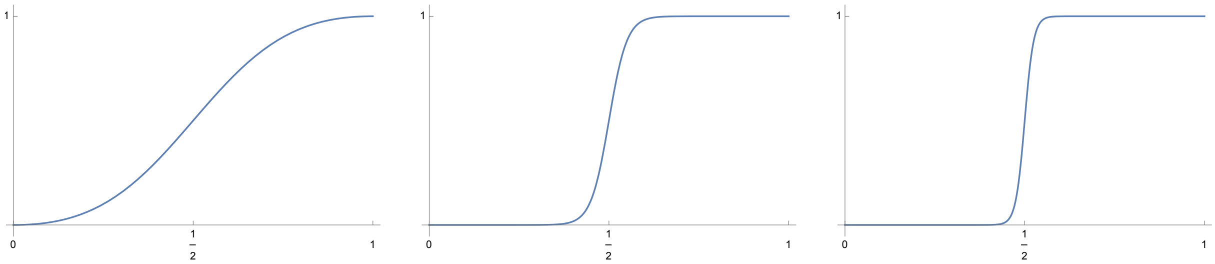
c. Par les mêmes arguments qu'on a déjà utilisés, on trouve

$$E[S_T] = (2p-1)\mathbf{E}[T],$$

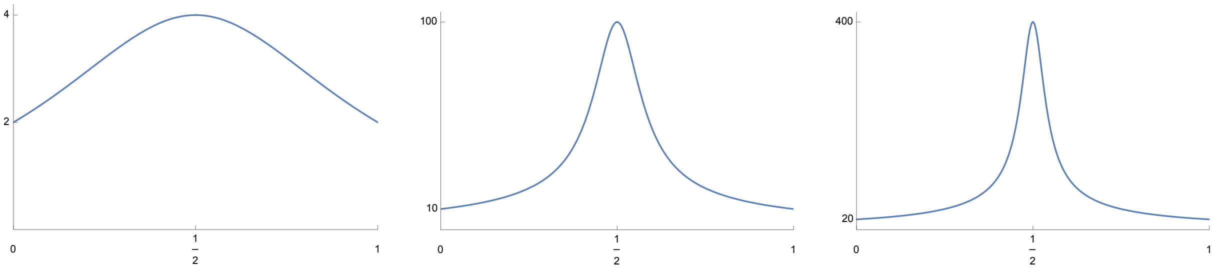
donc

$$\mathbf{E}[T] = \frac{\ell}{2p-1}\frac{p^\ell - (1-p)^\ell}{p^\ell + (1-p)^\ell}.$$

On peut représenter comment $\mathbf{P}(T^* < T^-)$ et $\mathbf{E}[T]$ varient en fonction de p pour différentes valeurs de ℓ.



Variation de $\mathbf{P}(T^* < T^-)$ en fonction de p pour $\ell = 2$, $\ell = 10$ et $\ell = 20$.



Variation de $\mathbf{E}[T]$ en fonction de p pour $\ell = 2$, $\ell = 10$ et $\ell = 20$.

— Fin du sujet —