Partiel

L'épreuve dure deux heures.
Les quatre exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
La note finale sera sur 30 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 4 points (2+2)

1. Donner la définition d'une martingale sur un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application mesurable bornée. Donner une expression de l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[f(X,Y)\,|\,Y]$.

Exercice 2

Barème indicatif : 14 points (3+3+4+4)

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, justifier que la variable aléatoire Y_n est dans $\mathbf{L}^1$ et qu'elle est indépendante de X_{n+1}.

2. Expliquer pourquoi, pour tout $n \geqslant 1$, on a l'égalité

$$Y_{n+1} = Y_n + (X_{n+1} - Y_n)\,\mathbf{1}_{\{X_{n+1} > Y_n\}}\,.$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, démontrer soigneusement qu'on a l'égalité

$$\mathbf{E}[Y_{n+1}\,|\,Y_n] = Y_n + \mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n\,|\,Y_n)\,.$$

On rappelle que $\mathbf{P}(X_{n+1} > Y_n\,|\,Y_n)$ désigne $\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{X_{n+1} > Y_n\}}\,|\,Y_n]$.

4. En déduire une relation de récurrence faisant intervenir $\mathbf{E}[Y_n]$ et $\mathbf{E}[Y_{n+1}]$, puis calculer la valeur de $\mathbf{E}[Y_n]$.

Exercice 3

Barème indicatif : 6 points (3+3)

1. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de dimension 2, de loi uniforme dans le demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$. Autrement dit, la loi de (X, Y) admet par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ la densité $f(x, y) = \frac{2}{\pi}\mathbf{1}_D(x, y)$. Calculer $\mathbf{E}[Y \,|\, X]$.

2. Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On définit $T = \lfloor Z \rfloor$, la partie entière de Z. Calculer $\mathbf{E}[Z \,|\, T]$.

Exercice 4

Barème indicatif : 16 points (3+3+2+2+2+2+2)

Soit $p \in \,]0, 1[$. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. On définit la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Soit ℓ un entier strictement positif fixé. On définit les variables aléatoires

$$T^+ = \inf\{n \geqslant 0 \,:\, S_n = \ell\} \qquad \text{et} \qquad T^- = \inf\{n \geqslant 0 \,:\, S_n = -\ell\},$$

avec la convention usuelle $\inf \varnothing = \infty$. On pose enfin $T = T^+ \wedge T^-$. Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $T(\omega) = \min(T^+(\omega), T^-(\omega))$. L'objectif de cet exercice est de calculer $\mathbf{E}[T]$ et $\mathbf{P}(T^+ < T^-)$.

1. Démontrer que T^+, T^- et T sont des temps d'arrêt.

2. On introduit l'événement $A = \bigcup_{k\geqslant 1} \{X_{2k\ell+1} = 1, X_{2k\ell+2} = 1, \ldots, X_{2k\ell+2\ell} = 1\}$. Montrer que $A \subseteq \{T < +\infty\}$. En déduire que T est fini presque sûrement.

3. a. Démontrer qu'il existe une unique valeur de p pour laquelle la suite $(S_n^2 - n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

b. Calculer $\mathbf{E}[T]$ pour cette valeur de p.

c. Que vaut $\mathbf{P}(T^+ < T^-)$ pour cette valeur de p ?

4. On suppose maintenant $p \in \,]0, 1[$ arbitraire avec $p \neq \frac{1}{2}$.

a. Trouver un réel $r \neq 1$ tel que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $Z_n = r^{S_n}$ soit une martingale, puis calculer $\mathbf{P}(T^+ < T^-)$.

b. Démontrer brièvement que $(S_n - n(2p - 1))_{n\geqslant 0}$ est une martingale et déterminer la valeur de $\mathbf{E}[T]$.

——— FIN DU SUJET ———