Examen – Deuxième session

L'épreuve dure trois heures.
Les cinq exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
La note finale sera sur 50 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3)

Dans cet exercice, U, V, X, Y, A, B désignent des variables aléatoires à valeurs réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

1. Soit V de loi uniforme sur l'ensemble fini $\{-2, -1, 0, 1, 3\}$. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbf{E}[V \mid V^2]$ et $\mathbf{E}[V^2 \mid V^3]$.

2. Soit U de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On note $Z = \big\lfloor |\log U| \big\rfloor$ la partie entière de $|\log U|$. Calculer $\mathbf{E}[U \mid Z]$.

3. Soient X et Y indépendantes de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer $\mathbf{E}[X + Y \mid 2X - 3Y]$.

4. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que A est bornée et que B est de loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$. Calculer $\mathbf{E}\big[e^{AB} \,\big|\, A\big]$.

5. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2x < 4y\}$. On note (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, la densité f donnée par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = c\, \mathbf{1}_D(x, y)\, x e^{-y},$$

pour une certaine constante réelle c. Calculer $\mathbf{E}[X \mid Y]$.

Solution de l'exercice 1

1. Pour tout $x \in \{-2, -1, 0, 1, 3\}$, notons A_x l'événement $\{V = x\}$. Ainsi, on a la partition

$$\Omega = A_{-2} \sqcup A_{-1} \sqcup A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_3$$

en cinq événements de probabilité $\frac{1}{5}$. La variable aléatoire V^2 s'écrit

$$V^2 = 0 \cdot \mathbf{1}_{A_0} + 1 \cdot \mathbf{1}_{A_{-1} \cup A_1} + 4 \cdot \mathbf{1}_{A_{-2}} + 9 \cdot \mathbf{1}_{A_3}.$$

La tribu engendrée par V^2 est donc la tribu engendrée par la partition

$$\Omega = B_0 \sqcup B_1 \sqcup B_4 \sqcup B_9,$$

où on a noté

$$B_0 = A_0,\ B_1 = A_{-1} \cup A_1,\ B_4 = A_{-2},\ B_9 = A_3.$$

Ainsi, d'après la formule qui donne l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire sachant une tribu engendrée par une partition finie, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[V \mid V^2\big] &= \frac{\mathbf{E}[V \mathbf{1}_{B_0}]}{\mathbf{P}(B_0)} \mathbf{1}_{B_0} + \frac{\mathbf{E}[V \mathbf{1}_{B_1}]}{\mathbf{P}(B_1)} \mathbf{1}_{B_1} + \frac{\mathbf{E}[V \mathbf{1}_{B_4}]}{\mathbf{P}(B_4)} \mathbf{1}_{B_4} + \frac{\mathbf{E}[V \mathbf{1}_{B_9}]}{\mathbf{P}(B_9)} \mathbf{1}_{B_9} \\ &= 0 \cdot \mathbf{1}_{B_0} + 0 \cdot \mathbf{1}_{B_1} + (-2) \cdot \mathbf{1}_{B_4} + 3 \cdot \mathbf{1}_{B_9}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbf{E}\big[V \,|\, V^2\big] = -2 \cdot \mathbf{1}_{\{V^2=4\}} + 3 \cdot \mathbf{1}_{\{V^2=9\}}.}$$

Pour la deuxième espérance conditionnelle, V^2 est une fonction de V^3, plus précisément, $V^2 = |V^3|^{\frac{2}{3}}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}\big[V^2 \,|\, V^3\big] = |V^3|^{\frac{2}{3}}.}$$

2. La variable aléatoire Z est à valeurs entières positives, et on a donc

$$\mathbf{E}[U \,|\, Z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}[U\mathbf{1}_{\{Z=n\}}]}{\mathbf{P}(Z=n)} \mathbf{1}_{\{Z=n\}}.$$

Fixons $n \geqslant 0$ et calculons le coefficient qui apparaît devant $\mathbf{1}_{\{Z=n\}}$. D'abord,

$$\mathbf{P}(Z=n) = \mathbf{P}(n \leqslant |\log U| < n+1) = \mathbf{P}(e^{-n-1} < U \leqslant e^{-n}) = e^{-n}(1-e^{-1}).$$

Ensuite,

$$\mathbf{E}[U\mathbf{1}_{\{Z=n\}}] = \mathbf{E}[U\mathbf{1}_{\{e^{-n-1}<U\leqslant e^{-n}\}}] = \tfrac{1}{2}(e^{-n}+e^{-n-1})(e^{-n}-e^{-n-1}) = \tfrac{1}{2}e^{-n}(1+e^{-1})\mathbf{P}(Z=n).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[U \,|\, Z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+e^{-1}}{2} e^{-n}\, \mathbf{1}_{\{Z=n\}},$$

si bien que

$$\boxed{\mathbf{E}[U \,|\, Z] = \tfrac{1+e^{-1}}{2}\, e^{-Z}.}$$

3. On a $\mathrm{Cov}(X+Y, 2X-3Y) = -1$ et $\mathrm{Var}(2X-3Y) = 13$, donc

$$\mathrm{Cov}\big((X+Y) + \tfrac{1}{13}(2X-3Y), 2X-3Y\big) = 0.$$

Or $\big((X+Y) + \frac{1}{13}(2X-3Y), 2X-3Y\big)$, qui est une image linéaire du vecteur gaussien (X,Y), est un vecteur gaussien. La nullité de la covariance de ses deux composantes implique donc qu'elles sont indépendantes. Ainsi,

$$\mathbf{E}\big[(X+Y) + \tfrac{1}{13}(2X-3Y) \,|\, 2X-3Y\big] = \mathbf{E}[(X+Y) + \tfrac{1}{13}(2X-3Y)] = 0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[(X+Y) + \tfrac{1}{13}(2X-3Y) \,|\, 2X-3Y\big] &= \mathbf{E}[X+Y \,|\, 2X-3Y] + \tfrac{1}{13}\mathbf{E}[2X-3Y \,|\, 2X-3Y] \\ &= \mathbf{E}[X+Y \,|\, 2X-3Y] + \tfrac{1}{13}(2X-3Y).\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\boxed{\mathbf{E}[X+Y \,|\, 2X-3Y] = -\tfrac{1}{13}(2X-3Y).}$$

4. D'après un des résultats du cours, l'espérance conditionnelle cherchée vaut $h(A)$, où la fonction h est définie par

$$h(x) = \mathbf{E}[e^{xB}] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{xt}\,\mathrm{d}t = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{\sinh x}{x}.$$

L'expression intégrale de la fonction h montre que celle-ci est bien définie pour tout x réel, y compris $x = 0$, et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. L'expression $\sinh x/x$ semble poser un problème en 0, mais on peut vérifier par directement que la fonction $x \mapsto \sinh x/x$ se prolonge par continuité en 0, où elle vaut 1.

Finalement,

$$\boxed{\mathbf{E}\big[e^{AB} \,\big|\, A\big] = \frac{\sinh A}{A}.}$$

5. Calculons la loi de Y. Soit h une fonction mesurable positive. On a, grâce au théorème de Fubini,

$$\mathbf{E}[h(Y)] = \int_D h(y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^\infty f(y)e^{-y}\left(\int_{\frac{y}{2}}^{2y} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \tfrac{15c}{8}\int_0^\infty f(y)y^2e^{-y}\,\mathrm{d}y.$$

Soit maintenant $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Xg(Y)] &= c\int_D xg(y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= c\int_0^\infty g(y)e^{-y}\left(\int_{\frac{y}{2}}^{2y} x^2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{63c}{24}\int_0^\infty g(y)y^3e^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{15c}{8}\int_0^\infty \tfrac{63}{24}\tfrac{8}{15} y\, g(y)\, y^2 e^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \mathbf{E}[\tfrac{7}{5}Y\, g(Y)].
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}[X \mid Y] = \tfrac{7}{5}Y.}$$

Exercice 2

Barème indicatif : 10 points (3+7)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

Soient $(X_i)_{i\geqslant 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes et identiquement distribuées, vérifiant $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \geqslant 1$. On pose $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, toute variable aléatoire $\mathscr{F}_n$-mesurable est bornée.

2. Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires telle que $M_0 = 0$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

A. La suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

B. Il existe une suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires telle que pour tout $n \geqslant 1$,

- H_n est $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable,
- $M_n = H_1X_1 + \ldots + H_nX_n$.

Solution de l'exercice 2

1. Pour $n = 0$, une variable aléatoire $\mathscr{F}_0$-mesurable est constante, donc bornée. Pour $n \geqslant 1$, la tribu $\mathscr{F}_n$ est engendrée par la partition de Ω en les 2^n événements équiprobables $\{X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_n\}$, avec $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$. Ainsi, une variable aléatoire $\mathscr{F}_n$-mesurable prend au plus 2^n valeurs distinctes, et elle est donc bornée.

2. Commençons par montrer $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$.

La variable M_n est bornée pour tout $n \geqslant 0$, donc intégrable. Par ailleurs, M_n, qui est une fonction des variables $X_1, \ldots, X_n$ et $H_1, \ldots, H_n$, toutes $\mathscr{F}_n$-mesurables, est $\mathscr{F}_n$-mesurable. Il reste à calculer

$$\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbf{E}[M_n + H_{n+1}X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = M_n + H_{n+1}\mathbf{E}[X_{n+1}] = M_n,$$

si bien que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Montrons maintenant $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$.

La seule définition possible de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ consiste à poser, pour tout $n \geqslant 1$,

$$H_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{X_n}. \tag{$\star$}$$

Avec cette définition, on a $M_n = H_1X_1 + \ldots + H_nX_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Il suffit donc de vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, la variable aléatoire H_n ainsi définie est $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable, c'est-à-dire qu'elle est constante sur chacun des 2^{n-1} blocs de la partition qui engendre $\mathscr{F}_{n-1}$. Fixons $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in \{-1, 1\}^{n-1}$ et considérons l'un de ces blocs, l'événement

$$A = \{X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_{n-1} = \varepsilon_{n-1}\}.$$

La variable aléatoire M_{n-1} est constante sur cet événement, disons égale à un réel a. Par ailleurs, l'événement A est l'union de deux des blocs de la partition qui engendre $\mathscr{F}_n$, à savoir $B = A \cap \{X_n = 1\}$ et $C = A \cap \{X_n = -1\}$. Ainsi, sur A, la variable aléatoire M_n s'écrit

$$M_n = b\mathbf{1}_B + c\mathbf{1}_C$$

avec b et c réels. Puisque M est une martingale, la moyenne de M_n sur le bloc A est égale à la valeur de M_{n-1} sur ce bloc, ce qui s'écrit

$$a = \frac{b+c}{2}.$$

Posons $h = \frac{b-c}{2}$. Alors

$$b = a + h \quad \text{et} \quad c = a - h.$$

Autrement dit, sur A, on a

$$M_n = a + h\mathbf{1}_B - h\mathbf{1}_C = M_{n-1} + hX_n.$$

Ainsi, toujours sur l'événement A, la variable aléatoire

$$\frac{M_n - M_{n-1}}{X_n} = h$$

est constante.

Nous avons montré que H_n définie par $(\star)$ est bien $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable, pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 3

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3)

1. Soit E un espace d'états et $P : E \times E \to [0,1]$ une matrice de transition sur E. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, on se donne une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans E, de noyau de transition P.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose que pour tout $x \in E$, on a

$$f(x) = \sum_{y\in E} P(x,y)f(y). \tag{1}$$

Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

2. Considérons $E = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'ensemble des couples d'entiers naturels strictement positifs. On définit un noyau de transition P sur E en posant, pour tout $(i,j) \in E$,

$$P\big((i,j),(i+1,j)\big) = \frac{i}{i+j} \quad \text{et} \quad P\big((i,j),(i,j+1)\big) = \frac{j}{i+j}.$$

Montrer que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(i,j) = \frac{i}{i+j}$ vérifie la propriété (1).

3. On étudie des bactéries qui peuvent être de deux types, A ou B. À l'instant initial, on considère une population de bactéries contenant au moins une bactérie de chaque type. À chaque instant entier, une bactérie est choisie uniformément dans la population, sans tenir compte de son type, indépendamment de tout le passé, et cette bactérie se duplique, ce qui signifie qu'il apparaît dans la population une nouvelle bactérie du même type qu'elle.

Montrer qu'avec probabilité 1, lorsqu'on laisse la population évoluer pendant un temps qui tend vers l'infini, la proportion de bactéries de chaque type admet une limite.

4. On note L la limite presque sûre de la proportion de bactéries de type A dans la population. Montrer que L n'est pas presque sûrement égale à une constante.

5. Reprendre les question 3 et 4 en supposant maintenant qu'il y a cinq types de bactéries, A, B, C, D, et E.

Solution de l'exercice 3

1. La suite $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ est adaptée à sa filtration naturelle par définition de cette filtration. Pour tout $n \geqslant 0$, puisque f est bornée, la variable aléatoire $f(X_n)$ est bornée, donc intégrable. Reste à calculer

$$\mathbf{E}[f(X_{n+1})|f(X_0),\ldots,f(X_n)].$$

Pour cela, on observe que $\sigma(f(X_0),\ldots,f(X_n))$ est incluse dans $\sigma(X_0,\ldots,X_n)$, et on commence par calculer

$$\mathbf{E}[f(X_{n+1})|X_0,\ldots,X_n].$$

En écrivant

$$f(X_{n+1}) = \sum_{y\in E} f(y)\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=y\}},$$

en utilisant la linéarité de l'espérance conditionnelle et le théorème de convergence dominée pour dire que

$$\mathbf{E}[f(X_{n+1})|X_0,\ldots,X_n] = \sum_{y\in E} f(y)\mathbf{P}(X_{n+1}=y|X_0,\ldots,X_n),$$

puis en appliquant la définition du fait que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de noyau de transition P, on trouve

$$\mathbf{E}[f(X_{n+1})|X_0,\ldots,X_n] = \sum_{y\in E} f(y)P(X_n,y).$$

En utilisant enfin le fait que f satisfait la relation (1), on trouve

$$\mathbf{E}[f(X_{n+1})|X_0,\ldots,X_n] = f(X_n).$$

On conclut en utilisant la propriété de tour de l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[f(X_{n+1})|f(X_0),\ldots,f(X_n)] &= \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[f(X_{n+1})|X_0,\ldots,X_n]\big|f(X_0),\ldots,f(X_n)\big]\\ &= \mathbf{E}[f(X_n)|f(X_0),\ldots,f(X_n)]\\ &= f(X_n),\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.

2. C'est un calcul direct. On peut se donner $(i,j)\in E$ et calculer

$$\frac{i}{i+j}\frac{i+1}{i+j+1}+\frac{j}{i+j}\frac{i}{i+j+1}$$

pour trouver que cela vaut $\frac{i}{i+j}$.

On peut aussi organiser le calcul de manière un peu plus claire en calculant

$$f(i+1,j)-f(i,j) = \frac{i+1}{i+j+1}-\frac{i}{i+j} = \frac{j}{(i+j)(i+j+1)}$$

et

$$f(i,j+1)-f(i,j) = \frac{i}{i+j+1}-\frac{i}{i+j} = \frac{-i}{(i+j)(i+j+1)}.$$

La différence entre les deux termes de (1) vaut, en général,

$$\sum_{y\in E} P(x,y)(f(y)-f(x)),$$

et dans notre cas :

$$\frac{i}{i+j}\,\frac{j}{(i+j)(i+j+1)}-\frac{j}{i+j}\,\frac{i}{(i+j)(i+j+1)},$$

qui est manifestement nul.

3. Notons (I_n,J_n) le couple formé du nombre I_n de bactéries de type A au temps n et du nombre J_n de bactéries de type B au temps n.

Alors une modélisation raisonnable de la situation décrite dans l'énoncé consiste à dire que (I_n, J_n) est une chaîne de Markov sur $E = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de noyau de transition P décrit à la question 2.

Notons $T_n = \frac{I_n}{I_n+J_n}$ la proportion de bactéries de type A au temps n. On a exactement $T_n = f(I_n, J_n)$, où la fonction f définie par $f(i,j) = \frac{i}{i+j}$ si bien que la question 2 nous assure que $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

Par ailleurs, par construction, on a $0 \leqslant T_n \leqslant 1$ presque sûrement pour tout $n \geqslant 0$. Ainsi, la martingale $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est positive, et même bornée. Un théorème du cours assure qu'elle converge presque sûrement, vers une certaine variable aléatoire L.

La proportion de bactéries de type B, qui au temps n est $1 - T_n$, converge presque sûrement vers $1 - L$.

4. Commençons par observer, en général, que la variance d'une martingale bornée est croissante. Soit donc $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale bornée sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$. On a, grâce à l'inégalité de Jensen,

$$\mathrm{Var}(M_{n+1}) = \mathbf{E}[M_{n+1}^2] - \mathbf{E}[M_{n+1}]^2 = \mathbf{E}[M_{n+1}^2] - \mathbf{E}[M_n]^2 \geqslant \mathbf{E}[M_n^2] - \mathbf{E}[M_n]^2 = \mathrm{Var}(M_n).$$

Dans notre cas, la variable aléatoire T_0 vaut $\frac{a}{a+b}$, et la variable aléatoire T_1 prend deux valeurs distinctes avec probabilité strictement positive, à savoir $\frac{a+1}{a+b+1}$ et $\frac{a}{a+b+1}$. On a donc $\mathrm{Var}(T_1) > 0$ et donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{Var}(T_n) \geqslant \mathrm{Var}(T_1) > 0.$$

Or la martingale $(T_n)_{n\geqslant 0}$, qui est bornée, est en particulier bornée dans L^2. Elle converge donc dans L^2, et la variance de T_n converge donc vers la variance de L. Ainsi,

$$\mathrm{Var}(L) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(T_n) \geqslant \mathrm{Var}(T_1) > 0.$$

La variable aléatoire L a donc une variance strictement positive, et n'est donc pas presque sûrement égale à une constante.

5. S'il y a un nombre de types de bactéries plus grand que 2, on peut appliquer le raisonnement des questions précédentes aux deux types A et “autre que A”. On trouve donc que la proportion de bactéries de type A converge presque sûrement vers une limite qui n'est pas presque sûrement égale à une constante. On peut répéter cet argument pour chacun des cinq (ou quel que soit leur nombre) types de bactéries présents.

Exercice 4

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3)

On note E l'ensemble des suites finies de 0 et de 1, y compris la suite vide, notée $\star$. Formellement,

$$E = \{\star\} \cup \bigcup_{\ell \geqslant 1} \{0,1\}^\ell.$$

En pratique, on écrit tout élément x de E autre que $\star$ comme un mot de la forme $a_1 \dots a_\ell$ avec $\ell \geqslant 1$ et $a_1, \dots, a_\ell \in \{0,1\}$. L'entier ℓ s'appelle la longueur du mot x et on convient que $\star$ est de longueur nulle. Pour tout $\ell \geqslant 0$, on note E_ℓ l'ensemble des mots de longueur ℓ. Ainsi par exemple, $E_0 = \{\star\}$ et $E_2 = \{00, 01, 10, 11\}$.

Étant donné un élément $x = a_1 \dots a_\ell$ de E, on note respectivement $x0$ et $x1$ les éléments $a_1 \dots a_\ell 0$ et $a_1 \dots a_\ell 1$ obtenus en ajoutant un 0 ou un 1 au bout de x. Si $\ell \geqslant 1$, on note $\bar{x} = a_1 \dots a_{\ell-1}$ le mot obtenu en enlevant la dernière lettre de x. Pour le cas où $\ell = 1$, il est entendu que $\bar{0} = \bar{1} = \star$.

Soit $p \in \,]0,1[$ un réel. On définit un noyau de transition P sur E en posant

$$P(\star, 0) = P(\star, 1) = \frac{p}{2}\ , \quad P(\star, \star) = 1 - p,$$

et pour tout élément x de E autre que $\star$,

$$P(x, x0) = P(x, x1) = \frac{p}{2} \ \text{ et } \ P(x, \bar{x}) = 1 - p.$$

1. Montrer que le noyau de transition P sur E est irréductible.

2. Déterminer une mesure invariante μ pour P telle que $\mu(\star) = 1$ et telle que pour tous éléments x et y de E de même longueur, on ait $\mu(x) = \mu(y)$.

3. Déterminer pour quelles valeurs de p une chaîne de Markov de noyau P sur E est récurrente positive, et déterminer dans ce cas le temps moyen de retour en $\star$.

4. Déterminer pour quelles valeurs de p une chaîne de Markov de noyau P sur E est récurrente nulle, et pour quelles valeurs de p elle est transiente.

5. On suppose que $p = \frac{2}{3}$. Montrer que le noyau P admet une infinité non dénombrable de mesures invariantes telles que $\mu(\star) = 1$.

Solution de l'exercice 4

1. Soient $x = a_1 \dots a_r$ et $y = b_1 \dots b_s$ des éléments de E. Alors

$$x = a_1 \dots a_r \to a_1 \dots a_{r-1} \to \cdots \to a_1 \to \star \to b_1 \to b_1 b_2 \to \cdots \to b_1 \dots b_s = y.$$

Ainsi, tout élément mène à tout autre, et la chaîne est irréductible.

2. Notons $q = 1 - p$. Soit μ une mesure sur E. L'invariance de μ s'écrit (outre le fait que μ ne doit pas être identiquement nulle, et donner à chaque élément de E une masse finie),

$$p\mu(\star) = q(\mu(0) + \mu(1)),$$

et, pour tout élément x de E autre que $\star$,

$$\mu(x) = \frac{p}{2}\mu(\bar{x}) + q(\mu(x0) + \mu(x1)).$$

Notons $e_\ell = \mu(E_\ell)$. Alors les équations ci-dessus nous donnent

$$e_0 = \tfrac{q}{p} e_1 \quad \text{et} \quad e_\ell = p e_{\ell-1} + q e_{\ell+1}.$$

Pour obtenir la deuxième égalité, on a sommé la deuxième équation d'invariance de μ sur tous les éléments x de E_ℓ et observé que chaque élément de $E_{\ell-1}$ apparaît deux fois dans le membre de droite.

La relation de récurrence sur $(e_\ell)_{\ell \geqslant 0}$ se résout en

$$e_\ell = e_0 \left(\tfrac{p}{q}\right)^\ell = \mu(\star) \left(\tfrac{p}{q}\right)^\ell.$$

Puisqu'il y a 2^ℓ éléments de longueur ℓ, la mesure μ ne peut donner à un élément de longueur ℓ que la masse

$$\mu(x) = \tfrac{1}{2^\ell} \left(\tfrac{p}{q}\right)^\ell = \left(\tfrac{p}{2q}\right)^\ell.$$

On vérifie directement que cette mesure est invariante pour P. Ainsi, en notant $\ell(x)$ la longueur d'un élément x, une mesure μ vérifiant les conditions souhaitées (et c'est en fait la seule) est donnée par

$$\boxed{\mu(x) = \left(\tfrac{p}{2q}\right)^{\ell(x)}.}$$

3. La masse totale de la mesure invariante que nous avons calculée à la question précédente vaut

$$\sum_{x \in E} \mu(x) = \sum_{\ell \geqslant 0} \left(\tfrac{p}{q}\right)^\ell.$$

Elle est donc finie si et seulement si $p < q$.

Si $p < q$, la chaîne admet une mesure invariante finie, elle est donc récurrente, et même récurrente positive.

Si $p \geqslant q$, la chaîne admet une mesure invariante infinie. Elle ne peut donc être récurrente positive, car si elle l'était, toutes ses mesures invariantes seraient finies.

Finalement, la chaîne est donc récurrente positive si et seulement si

$$\boxed{p < \frac{1}{2}.}$$

De plus, dans ce cas, le temps de retour moyen en $\star$ vaut

$$\mathbf{E}_\star[T_\star] = \frac{\mu(E)}{\mu(\star)} = \mu(E) = \frac{q}{q-p},$$

donc

$$\boxed{\mathbf{E}_\star[T_\star] = \frac{1-p}{1-2p}.}$$

4. Étudions maintenant le cas où $p \geqslant q$. Notons $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur E de noyau de transition P. Alors la suite $(L_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$L_n = \ell(X_n), \quad \text{la longueur de } X_n,$$

est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de noyau de transition

$$P(0,0) = q, P(0,1) = p,\ \ P(\ell,\ell+1) = p,\ \ P(\ell,\ell-1) = q.$$

Partant de 1, la loi du temps d'atteinte de 0 pour cette chaîne est exactement la même que celle d'une marche aléatoire simple biaisée sur $\mathbb{Z}$, qui monte de 1 avec probabilité p et descend de 1 avec probabilité q.

Si $p = q$, cette marche est la marche symétrique, qui est récurrente, et ce temps d'atteinte de 0 partant de 1 est fini presque sûrement. Ainsi, la chaîne $(L_n)_{n\geqslant 0}$ passe une infinité de fois en 0. Ceci signifie que la marche de noyau P passe une infinité de fois en $\star$, et qu'elle est récurrente. Dans ce cas, la mesure μ déterminée à la mesure précédente est, à une constante près, l'unique mesure invariante, et elle est de masse infinie : la chaîne est récurrente nulle.

En revanche, si $p > q$, cette marche est transiente, et elle a donc une probabilité strictement positive, partant de 1, de ne jamais revenir en 0. Ainsi, partant d'un élément de E_1, la marche sur E a une probabilité strictement positive de ne jamais revenir en $\star$. Elle est donc transiente.

Finalement, la chaîne est

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{récurrente positive} & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ \text{récurrente nulle} & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ \text{transiente} & \text{si } p > \frac{1}{2} \end{array}}$$

5. Pour $p = 2/3$, l'invariance prend la forme simple

$$\mu(\star) = \frac{1}{2}(\mu(0) + \mu(1)) \ \text{ et } \ \mu(x) = \frac{1}{3}(\mu(\bar{x}) + \mu(x0) + \mu(x1))$$

et la deuxième équation peut se réécrire

$$\mu(x) - \mu(\bar{x}) = \big(\mu(x0) - \mu(x)\big) + \big(\mu(x1) - \mu(x)\big). \tag{2}$$

Si l'on convient que $\bar{\star} = \star$, cette équation, appliquée à $x = \star$, redonne également la première équation d'invariance ci-dessus, si bien qu'une mesure μ est invariante si et seulement si elle satisfait (2).

On va utiliser le fait élémentaire suivant : si trois réels a, b, c vérifient $a = b + c$, alors il existe un réel h tel que $b = \frac{a}{2} + h$ et $c = \frac{a}{2} - h$. (Ce fait a déjà été utilisé dans la solution de l'exercice 2.)

Soit μ une mesure invariante. Il découle de (2) et de la remarque que nous venons de faire que pour tout $x \in E$, il existe un réel h_x tel que pour $a \in \{0,1\}$, on ait

$$\mu(xa) - \mu(x) = \tfrac{1}{2}(\mu(x) - \mu(\bar{x})) + (-1)^a h_x.$$

En écrivant $x = a_1 \ldots a_{\ell-1}$, avec $\ell \geqslant 2$, et $a = a_\ell$, cette relation devient

$$\mu(a_1 \ldots a_\ell) - \mu(a_1 \ldots a_{\ell-1}) = \tfrac{1}{2}(\mu(a_1 \ldots a_{\ell-1}) - \mu(a_1 \ldots a_{\ell-2})) + (-1)^{a_\ell} h_{a_1 \ldots a_{\ell-1}}$$

En tâtonnant un peu, on parvient à résoudre cette récurrence, d'abord pour exprimer $\mu(x) - \mu(\bar{x})$ pour tout x, puis en sommant, pour exprimer $\mu(x)$. On finit par trouver que

$$\mu(a_1 \dots a_\ell) = 1 + \sum_{k=0}^{\ell-1} (2 - 2^{-(\ell-1-k)})(-1)^{a_{k+1}} h_{a_1 \dots a_k}. \tag{3}$$

Pour $p = \frac{2}{3}$, toute mesure invariante pour P a cette forme. Par exemple, la mesure que nous avons trouvée à la question 2 correspond au cas où tous les h_x sont nuls.

En remontant nos calculs, on vérifie que pour toute fonction $h : E \to \mathbb{R}$, l'égalité (3) définit une mesure invariante pour P, pourvu que le membre de droite de (3) soit positif pour tout $a_1 \dots a_\ell$.

Or on a l'inégalité

$$\left| \sum_{k=0}^{\ell-1} (2 - 2^{-(\ell-1-k)})(-1)^{a_{k+1}} h_{a_1 \dots a_k} \right| \leqslant 2 \sum_{k=0}^{\ell-1} |h_{a_1 \dots a_k}|,$$

si bien que pour que le membre de droite de (3) soit toujours positif, il suffit que le membre de droite de cette inégalité soit toujours plus petit que 1.

Une condition suffisante sur la fonction $h : E \to \mathbb{R}$ est, par exemple, que pour toute suite infinie $a_1, a_2, \dots$ de 0 et de 1 on ait

$$|h(\star)| + \sum_{k=1}^{\infty} |h_{a_1 \dots a_k}| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Cette condition est encore assez compliquée, et une condition suffisante beaucoup plus simple sur est

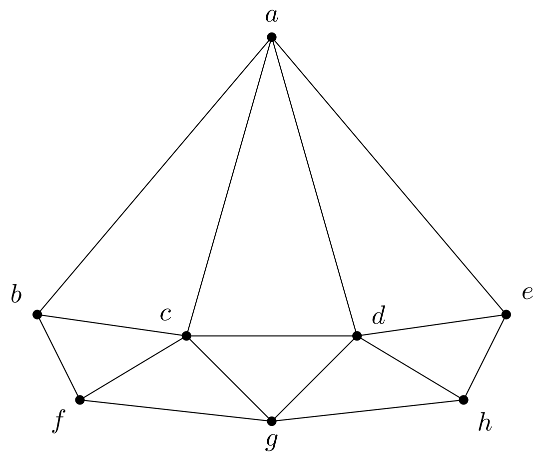
$$|h(x)| \leqslant 2^{-\ell(x)-2}.$$

Cette condition est loin d'être nécessaire, mais elle est suffisante pour que la fonction h détermine une mesure invariante pour P. Or l'ensemble des fonctions h qui la vérifient, et donc l'ensemble des mesures invariantes de P, est infini non dénombrable.

Exercice 5

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On étudie la marche aléatoire sur le graphe représenté ci-dessous.



1. Montrer que cette marche aléatoire admet une unique mesure de probabilité invariante, qu'on notera π, et calculer $\pi(a)$, $\pi(d)$ et $\pi(f)$.

2. On fait partir la marche aléatoire du sommet g. Après combien de temps en moyenne la marche aléatoire revient-elle en g pour la première fois ?

3. On fait partir la marche aléatoire du sommet b. Combien de fois en moyenne la marche visite-t-elle le sommet e avant de revenir pour la première fois en b ?

4. Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire issue de a. Posons $M = \{b, c, d, e\}$. La quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_M(X_i)$$

admet-elle sous $\mathbf{P}_a$ une limite presque sûre lorsque n tend vers l'infini, et si oui, quelle est cette limite ?

5. Soit u une fonction à valeurs réelles sur l'ensemble des sommets de notre graphe. La quantité

$$\mathbf{E}_a[u(X_n)]$$

admet-elle une limite lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

Solution de l'exercice 5

1. Le graphe est connexe, donc la marche aléatoire sur ce graphe est une chaîne de Markov irréductible. Tous les états sont donc de même nature (récurrents ou transients), et comme l'espace d'états est fini, l'un d'entre eux est récurrent, donc ils sont tous récurrents. La chaîne admet donc une mesure invariante unique à multiplication près par une constante strictement positive, donc une unique mesure de probabilité invariante.

Pour déterminer cette probabilité invariante, on utilise le fait que la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible, donc invariante, pour la marche aléatoire sur le graphe. Cette mesure associe respectivement les masses 4, 5 et 3 aux sommets a, d et f.

La masse totale de cette mesure est 30 (c'est deux fois le nombre d'arêtes). Ainsi, les masses des sommets a, d, f pour l'unique probabilité invariante π sont

$$\pi(a) = \frac{2}{15}, \; \pi(d) = \frac{1}{6}, \; \pi(f) = \frac{1}{10}.$$

2. Le temps moyen de retour est donné par l'inverse de la masse attribuée par la probabilité invariante :

$$\mathbf{E}_g[T_g] = \frac{1}{\pi(g)} = \frac{15}{2}.$$

3. L'unique mesure invariante ν qui associe à b la masse 1 associe à chaque autre sommet une masse égale au nombre moyen de visites en ce sommet entre deux visites en b. On a $\nu = \pi/\pi(b)$, donc le nombre moyen de visites en e entre deux visites en b vaut

$$\nu(e) = \frac{\pi(e)}{\pi(b)} = 1.$$

4. Puisque la chaîne est irréductible et récurrente, le théorème ergodique assure que la quantité considérée converge $\mathbf{P}_a$-presque sûrement vers

$$\pi(M) = \frac{8}{15}.$$

5. Partant de a, on peut y revenir en 2 pas ou en 3 pas. L'état a, et donc tout la chaîne, est donc apériodique. Le théorème de convergence vers l'équilibre s'applique donc, et on a la convergence

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_a[u(X_n)] = \int u \; \mathrm{d}\pi.$$

——— Fin du sujet ———