Examen – Deuxième session

L'épreuve dure trois heures.
Les cinq exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
La note finale sera sur 50 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3)

Dans cet exercice, U, V, X, Y, A, B désignent des variables aléatoires à valeurs réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

1. Soit V de loi uniforme sur l'ensemble fini $\{-2, -1, 0, 1, 3\}$. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbf{E}[V \mid V^2]$ et $\mathbf{E}[V^2 \mid V^3]$.

2. Soit U de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On note $Z = \lfloor |\log U| \rfloor$ la partie entière de $|\log U|$. Calculer $\mathbf{E}[U \mid Z]$.

3. Soient X et Y indépendantes de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer $\mathbf{E}[X+Y \mid 2X-3Y]$.

4. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que A est bornée et que B est de loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$. Calculer $\mathbf{E}\left[e^{AB} \,\middle|\, A\right]$.

5. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2x < 4y\}$. On note (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, la densité f donnée par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = c\, \mathbf{1}_D(x, y)\, x e^{-y},$$

pour une certaine constante réelle c. Calculer $\mathbf{E}[X \mid Y]$.

Exercice 2

Barème indicatif : 10 points (3+7)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

Soient $(X_i)_{i \geqslant 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes et identiquement distribuées, vérifiant $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \geqslant 1$. On pose $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, toute variable aléatoire $\mathscr{F}_n$-mesurable est bornée.

2. Soit $(M_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires telle que $M_0 = 0$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

A. La suite $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$.

B. Il existe une suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires telle que pour tout $n \geqslant 1$,

- H_n est $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable,
- $M_n = H_1 X_1 + \ldots + H_n X_n$.

Exercice 3

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3)

1. Soit E un espace d'états et $P : E \times E \to [0,1]$ une matrice de transition sur E. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, on se donne une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans E, de noyau de transition P.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose que pour tout $x \in E$, on a

$$f(x) = \sum_{y\in E} P(x,y)f(y). \tag{1}$$

Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

2. Considérons $E = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'ensemble des couples d'entiers naturels strictement positifs. On définit un noyau de transition P sur E en posant, pour tout $(i,j) \in E$,

$$P\big((i,j),(i+1,j)\big) = \frac{i}{i+j} \quad \text{et} \quad P\big((i,j),(i,j+1)\big) = \frac{j}{i+j}.$$

Montrer que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(i,j) = \frac{i}{i+j}$ vérifie la propriété (1).

3. On étudie des bactéries qui peuvent être de deux types, A ou B. À l'instant initial, on considère une population de bactéries contenant au moins une bactérie de chaque type. À chaque instant entier, une bactérie est choisie uniformément dans la population, sans tenir compte de son type, indépendamment de tout le passé, et cette bactérie se duplique, ce qui signifie qu'il apparaît dans la population une nouvelle bactérie du même type qu'elle.

Montrer qu'avec probabilité 1, lorsqu'on laisse la population évoluer pendant un temps qui tend vers l'infini, la proportion de bactéries de chaque type admet une limite.

4. On note L la limite presque sûre de la proportion de bactéries de type A dans la population. Montrer que L n'est pas presque sûrement égale à une constante.

5. Reprendre les question 3 et 4 en supposant maintenant qu'il y a cinq types de bactéries, A, B, C, D, et E.

Exercice 4

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3)

On note E l'ensemble des suites finies de 0 et de 1, y compris la suite vide, notée $\star$. Formellement,

$$E = \{\star\} \cup \bigcup_{\ell \geqslant 1} \{0,1\}^{\ell}.$$

En pratique, on écrit tout élément x de E autre que $\star$ comme un mot de la forme $a_1 \dots a_\ell$ avec $\ell \geqslant 1$ et $a_1, \dots, a_\ell \in \{0,1\}$. L'entier ℓ s'appelle la longueur du mot x et on convient que $\star$ est de longueur nulle. Pour tout $\ell \geqslant 0$, on note E_ℓ l'ensemble des mots de longueur ℓ. Ainsi par exemple, $E_0 = \{\star\}$ et $E_2 = \{00, 01, 10, 11\}$.

Étant donné un élément $x = a_1 \dots a_\ell$ de E, on note respectivement $x0$ et $x1$ les éléments $a_1 \dots a_\ell 0$ et $a_1 \dots a_\ell 1$ obtenus en ajoutant un 0 ou un 1 au bout de x. Si $\ell \geqslant 1$, on note $\bar{x} = a_1 \dots a_{\ell-1}$ le mot obtenu en enlevant la dernière lettre de x. Pour le cas où $\ell = 1$, il est entendu que $\bar{0} = \bar{1} = \star$.

Soit $p \in]0,1[$ un réel. On définit un noyau de transition P sur E en posant

$$P(\star, 0) = P(\star, 1) = \frac{p}{2}\ , \quad P(\star, \star) = 1 - p,$$

et pour tout élément x de E autre que $\star$,

$$P(x, x0) = P(x, x1) = \frac{p}{2} \quad \text{et} \quad P(x, \bar{x}) = 1 - p.$$

1. Montrer que le noyau de transition P sur E est irréductible.

2. Déterminer une mesure invariante μ pour P telle que $\mu(\star) = 1$ et telle que pour tous éléments x et y de E de même longueur, on ait $\mu(x) = \mu(y)$.

3. Déterminer pour quelles valeurs de p une chaîne de Markov de noyau P sur E est récurrente positive, et déterminer dans ce cas le temps moyen de retour en $\star$.

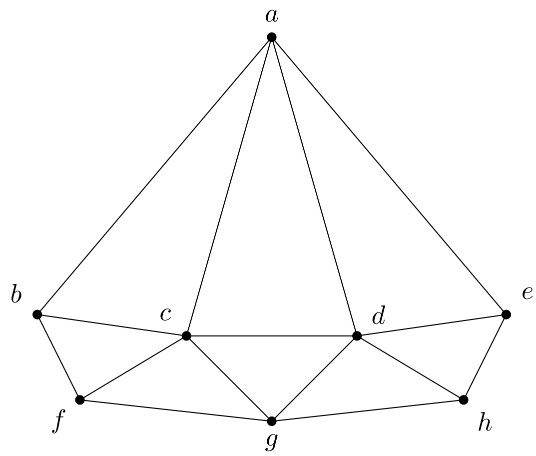
4. Déterminer pour quelles valeurs de p une chaîne de Markov de noyau P sur E est récurrente nulle, et pour quelles valeurs de p elle est transiente.

5. On suppose que $p = \frac{2}{3}$. Montrer que le noyau P admet une infinité non dénombrable de mesures invariantes telles que $\mu(\star) = 1$.

Exercice 5

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On étudie la marche aléatoire sur le graphe représenté ci-dessous.



1. Montrer que cette marche aléatoire admet une unique mesure de probabilité invariante, qu'on notera π, et calculer $\pi(a)$, $\pi(d)$ et $\pi(f)$.

2. On fait partir la marche aléatoire du sommet g. Après combien de temps en moyenne la marche aléatoire revient-elle en g pour la première fois ?

3. On fait partir la marche aléatoire du sommet b. Combien de fois en moyenne la marche visite-t-elle le sommet e avant de revenir pour la première fois en b ?

4. Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire issue de a. Posons $M = \{b, c, d, e\}$. La quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_M(X_i)$$

admet-elle sous $\mathbf{P}_a$ une limite presque sûre lorsque n tend vers l'infini, et si oui, quelle est cette limite ?

5. Soit u une fonction à valeurs réelles sur l'ensemble des sommets de notre graphe. La quantité

$$\mathbf{E}_a[u(X_n)]$$

admet-elle une limite lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

—— Fin du sujet ——