Examen

L'épreuve dure trois heures.
Les cinq exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
La note finale sera sur 50 points.
Le sujet occupe trois pages.

Exercice 1

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

1. Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 2]$. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[U \mid U^2]$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. Soient S et Θ deux variables aléatoires indépendantes telles que S est de loi exponentielle de paramètre 1, et Θ de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a. Démontrer que les couples (X, Y) et $(\sqrt{2S}\cos\Theta, \sqrt{2S}\sin\Theta)$ ont même loi.

b. On note $N_1 = |X| + |Y|$ et $N_2 = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Calculer $\mathbf{E}[N_1 \mid N_2]$.

3. Soit V une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On note $Z = \left\lfloor \frac{1}{V} \right\rfloor$ la partie entière de $\frac{1}{V}$. Calculer $\mathbf{E}[V \mid Z]$.

4. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que B est de loi exponentielle de paramètre 1. Calculer $\mathbf{E}[\cos(A^2 + AB) \mid A]$.

5. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, xy > 1\}$. On note (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, la densité f donnée par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = c\, \mathbf{1}_D(x, y)\, e^{-x-y},$$

pour une certaine constante réelle c. Calculer $\mathbf{E}[Y \mid X]$.

Solution de l'exercice 1

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On a

$$\mathbf{E}[Ug(U^2)] = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} tg(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} tg(t^2)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int_{1}^{2} tg(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

La première intégrale est nulle comme intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0. On a donc

$$\mathbf{E}[Ug(U^2)] = \frac{1}{3}\int_{1}^{2} tg(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{1}^{2} \sqrt{t^2}g(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} \sqrt{t^2}\,\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t^2)g(t^2)\,\mathrm{d}t$$

si bien que

$$\mathbf{E}[Ug(U^2)] = \mathbf{E}\big[\sqrt{U^2}\,\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(U^2)g(U^2)\big].$$

Définissons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant, pour tout x réel, $h(x) = \sqrt{x}\,\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$. Alors

$$\mathbf{E}[U \mid U^2] = h(U^2) = \sqrt{U^2}\,\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(U^2).$$

Cette question a été plus rarement bien traitée que je ne m'y attendais. J'ai lu souvent que U était $\sigma(U^2)$-mesurable, ce qui n'est pas vrai, car le signe de U est aléatoire, et n'est pas connu si on connaît seulement U^2. Or justement, on pouvait commencer par raisonner de manière heuristique en se disant que si U^2 est comprise entre 0 et 1, il y a deux valeurs possibles pour U, qui sont $\pm\sqrt{U^2}$, et comme la loi de U est uniforme, ces deux valeurs sont équiprobables, et donc la moyenne de U est nulle. En revanche, si U^2 est compris entre 1 et 4, on sait que U est positif, égal à $\sqrt{U^2}$. Ce qui précède ne constitue pas une démonstration, mais permet de guider le calcul (qu'on fait par exemple avec la méthode de la fonction muette), et de vérifier le résultat. À propos de vérification, il peut être utile de vérifier que la variable aléatoire qu'on obtient comme espérance conditionnelle a même espérance que la variable aléatoire initiale. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'on s'est trompé. Cela évite d'écrire par exemple $\mathbf{E}[U|U^2] = 3U$, que j'ai lu.

2.a. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On a

$$\mathbf{E}[f(X,Y)] = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Écrivons cette inégrale dans les coordonnées polaires $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi]$, avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On a alors

$$\mathbf{E}[f(X,Y)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-\frac{1}{2}r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

En faisant le changement de variable $s = \frac{1}{2}r^2$, on trouve

$$\mathbf{E}[f(X,Y)] = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{2s}\cos\theta, \sqrt{2s}\sin\theta)e^{-s}\,\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \mathbf{E}\big[f\big(\sqrt{2S}\cos\Theta, \sqrt{2S}\sin\Theta\big)\big],$$

ce qui montre l'égalité en loi cherchée.

Deux erreurs qui ont été parfois commises sont les suivantes. La première consistait à se contenter de montrer que X a même loi que $\sqrt{2S}\cos\Theta$ d'une part et Y même loi que $\sqrt{2S}\sin\Theta$ d'autre part. Ceci ne suffit pas à assurer que les couples ont même loi. La seconde consistait à calculer l'espérance et la covariance du vecteur $(\sqrt{2S}\cos\Theta, \sqrt{2S}\sin\Theta)$ et à constater que ce sont les mêmes que celles du vecteur (X,Y). Or il ne suffit pas de montrer qu'une variable aléatoire est centrée et de variance 1 pour montrer qu'elle est gaussienne. Cette question fait tout de même partie de celles qui ont été souvent traitées.

b. Les vecteurs (X,Y) et $(\sqrt{2S}\cos\Theta, \sqrt{2S}\sin\Theta)$ ont même loi. En leur appliquant la fonction $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $n(x,y) = (|x|+|y|, \sqrt{x^2+y^2})$, on obtient donc deux vecteurs aléatoires qui ont encore la même loi, à savoir

$$n(X,Y) = (N_1,N_2) \text{ et } n(\sqrt{2S}\cos\Theta, \sqrt{2S}\sin\Theta) = \big(\sqrt{2S}(|\cos\Theta| + |\sin\Theta|), \sqrt{2S}\big).$$

Si nous trouvons une fonction mesurable h telle que

$$\mathbf{E}\big[\sqrt{2S}(|\cos\Theta| + |\sin\Theta|) \mid \sqrt{2S}\big] = h(\sqrt{2S}),$$

nous pourrons donc affirmer que

$$\mathbf{E}[N_1|N_2] = h(N_2).$$

Or il se trouve que la première espérance conditionnelle n'est pas difficile à calculer. En effet, les propriétés usuelles de l'espérance conditionnelle et l'indépendance de S et Θ nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[\sqrt{2S}(|\cos\Theta| + |\sin\Theta|)\,|\,\sqrt{2S}\big] &= \sqrt{2S}\,\mathbf{E}\big[|\cos\Theta| + |\sin\Theta|\,|\,\sqrt{2S}\big] \\ &= \sqrt{2S}\,\mathbf{E}\big[|\cos\Theta| + |\sin\Theta|\big].\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à calculer la dernière espérance, qui vaut

$$\mathbf{E}\big[|\cos\Theta| + |\sin\Theta|\big] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cos\theta| + |\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{\pi}.$$

Ainsi, la fonction h définie par $h(x) = \frac{4}{\pi}x$ convient, et

$$\mathbf{E}[N_1|N_2] = \tfrac{4}{\pi}N_2.$$

L'idée que l'espérance conditionnelle de N_1 sachant N_2 est *la même fonction* de N_2 que la fonction de $\sqrt{2S}$ qui donne l'espérance conditionnelle de $\sqrt{2S}(|\cos\Theta| + |\sin\Theta|)$ sachant $\sqrt{2S}$ a été exprimée, de manière plus ou moins explicite et plus ou moins claire, dans un assez grand nombre de copies, ce qui m'a agréablement surpris, ce point n'étant pas tout à fait simple. Néanmoins, il est souvent resté un élément de confusion qui a amené beaucoup de gens à écrire des choses comme $\mathbf{E}[N_1|N_2] = \frac{4}{\pi}\sqrt{2S}$.

3. Commençons par observer que Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}(\tfrac{1}{k+1} < V \leqslant \tfrac{1}{k}) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. On a, par convergence monotone,

$$\mathbf{E}[Vg(Z)] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}[Vg(Z)\mathbf{1}_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(V)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\mathbf{E}[V\mathbf{1}_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(V)],$$

et l'espérance dans la somme vaut

$$\mathbf{E}[V\mathbf{1}_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(V)] = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{k^2} + \tfrac{1}{(k+1)^2}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{k+1})(\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{k+1}).$$

On a donc finalement

$$\mathbf{E}[Vg(Z)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1})}{k(k+1)} = \mathbf{E}[\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{Z} + \tfrac{1}{Z+1})g(Z)],$$

si bien que, comme on pouvait s'y attendre,

$$\mathbf{E}[V\,|\,Z] = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{Z} + \tfrac{1}{Z+1}).$$

Cette question fait partie des quelques questions souvent bien traitées de l'examen. Le résultat a le plus souvent été donné sous la forme $\frac{2Z+1}{2Z(Z+1)}$, qui est certes plus compact que la forme que j'ai choisie dans le corrigé, mais à mon avis moins clair. Une remarque à propos de la calligraphie, de l'écriture (qui est une question à laquelle je reviendrai dans les commentaires généraux à la fin du corrigé) : dans un résultat comme celui-là, il est indispensable d'écrire 2 et Z d'une manière qui permette de les distinguer.

4. D'après un des résultats du cours, l'espérance conditionnelle cherchée vaut $h(A)$, où la fonction h est définie par

$$h(x) = \mathbf{E}[\cos(x^2 + xB)] = \int_0^{+\infty} \cos(x^2 + xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Il reste à calculer cette intégrale, qui est la partie réelle de

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} e^{-(1-ix)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-ix}e^{ix^2} = \frac{(1+ix)e^{ix^2}}{1+x^2},$$

et qui vaut donc

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}(\cos x^2 - x\sin x^2).$$

Finalement,

$$\mathbf{E}[\cos(A^2 + AB) \,|\, A] = \frac{1}{1+A^2}(\cos A^2 - A\sin A^2).$$

Le calcul de l'intégrale du produit d'un cosinus et d'une exponentielle a causé de l'inquiétude à beaucoup. Certain(e)s ont intégré par parties, ce qui était une manière de faire possible. De petites erreurs de calcul ont été assez fréquentes.

5. Commençons par calculer la loi de X. Pour cela, soit f une fonction mesurable positive. On a, grâce au théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[f(X)] &= c\int_D f(x)e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\Big(\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} e^{-y}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= c\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Donnons-nous maintenant une fonction mesurable positive $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et calculons $\mathbf{E}[Yg(X)]$. Cette espérance vaut, toujours grâce au théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Yg(X)] &= c\int_D yg(x)e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^{+\infty} g(x)e^{-x}\Big(\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} ye^{-y}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= c\int_0^{+\infty} g(x)e^{-x}\Big[-(1+y)e^{-y}\Big]_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\,\mathrm{d}x\\ &= c\int_0^{+\infty} g(x)\big(1+\tfrac{1}{x}\big)e^{-x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et nous reconnaissons dans cette expression l'espérance $\mathbf{E}\big[\big(1+\frac{1}{X}\big)g(X)\big]$. Nous avons donc montré que

$$\mathbf{E}[Y|X] = \tfrac{1}{X} + 1.$$

Cette question a été généralement bien traitée. Certains ont cherché à calculer c, ce qui n'était ni possible (on ne peut pas dire beaucoup mieux que de le définir par une intégrale) ni utile.

Exercice 2

Barème indicatif : 10 points (5+5)

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. Soient ε et $(\xi_i)_{i\geqslant 1}$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, vérifiant $\mathbf{P}(\varepsilon = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = \mathbf{P}(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \geqslant 1$. On définit une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires en posant $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose enfin $Y_n = \varepsilon\,|X_n|$.

1. Calculer, pour tout $n \geqslant 0$, l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[Y_{n+1}\,|\,Y_n]$.

2. Existe-t-il une filtration sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ par rapport à laquelle la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale ?

Solution de l'exercice 2

1. Soit $n \geqslant 0$. La variable aléatoire Y_n prend les valeurs $-n, -n+2, \ldots, n-2, n$ avec probabilité strictement positive, et aucune autre. Autrement dit, l'espace de probabilité admet la partition mesurable

$$\Omega = \bigsqcup_{k=0}^{n} \{Y_n = n - 2k\},$$

dont chacun des blocs est de probabilité strictement positive, et cette partition engendre la tribu $\sigma(Y_n)$. On a donc

$$\mathbf{E}[Y_{n+1}|Y_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{P}(Y_n = n-2k)} \mathbf{E}\big[Y_{n+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=n-2k\}}\big]\mathbf{1}_{\{Y_n=n-2k\}}.$$

Fixons k entre 0 et n et calculons l'espérance qui apparaît dans le k-ième terme de la somme. Supposons d'abord que $n-2k$ est strictement positif. Alors sur l'événement $Y_n = n-2k$, on a nécessairement $\varepsilon = 1$. L'espérance vaut donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[Y_{n+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=n-2k\}}\big] &= \mathbf{E}\big[|X_n + \xi_{n+1}|\mathbf{1}_{\{|X_n|=n-2k\}}\mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\big] \\ &= \mathbf{E}\big[|X_n + \xi_{n+1}|\mathbf{1}_{\{X_n=n-2k\}}\mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\big] + \mathbf{E}\big[|X_n + \xi_{n+1}|\mathbf{1}_{\{X_n=-n+2k\}}\mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\big].\end{aligned}$$

Puisque $n-2k > 0$, sur l'événement $\{X_n = n-2k\}$, on a $X_n + \xi_{n+1} \geqslant 0$. De même, sur l'événement $\{X_n = -n+2k\}$, on a $X_n + \xi_{n+1} \leqslant 0$. Ainsi,

$$\mathbf{E}\big[Y_{n+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=n-2k\}}\big] = \mathbf{E}\big[(X_n+\xi_{n+1})\mathbf{1}_{\{X_n=n-2k\}}\mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\big] - \mathbf{E}\big[(X_n+\xi_{n+1})\mathbf{1}_{\{X_n=-n+2k\}}\mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\big]$$

En utilisant l'indépendance de X_n, ε et ξ_{n+1}, et le fait que ξ_{n+1} est centrée, on voit que dans chaque terme du membre de droite, le terme contenant ξ_{n+1} est nul, si bien que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[Y_{n+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=n-2k\}}\big] &= \mathbf{E}\big[X_n\mathbf{1}_{\{X_n=n-2k\}}\mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\big] - \mathbf{E}\big[X_n\mathbf{1}_{\{X_n=-n+2k\}}\mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\big] \\ &= \mathbf{E}\big[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|=n-2k\}}\mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\big] \\ &= \mathbf{E}\big[Y_n\mathbf{1}_{\{Y_n=n-2k\}}\big] \\ &= (n-2k)\mathbf{P}(Y_n = n-2k).\end{aligned}$$

Le cas où $n-2k$ est strictement négatif se traite exactement de la même manière, la seule différence étant que dans ce cas, sur l'événement $Y_n = n-2k$, on a $\varepsilon = -1$. On aboutit exactement à la même égalité.

Traitons maintenant le cas où $n-2k = 0$. Dans ce cas,

$$\mathbf{E}\big[Y_{n+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=n-2k\}}\big] = \mathbf{E}\big[\varepsilon|\xi_{n+1}|\mathbf{1}_{\{Y_n=0\}}\big] = \mathbf{E}\big[\varepsilon\mathbf{1}_{\{X_n=0\}}\big]$$

et puisque ε est centré et indépendant de X_n, cette espérance est nulle. Finalement,

$$\mathbf{E}\big[Y_{n+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=n-2k\}}\big] = 0 = (n-2k)\mathbf{P}(Y_n = n-2k).$$

Nous pouvons terminer le calcul de $\mathbf{E}[Y_{n+1}|Y_n]$: cette espérance conditionnelle vaut

$$\mathbf{E}[Y_{n+1}|Y_n] = \sum_{k=0}^{n}(n-2k)\mathbf{1}_{\{Y_n=n-2k\}} = Y_n.$$

2. S'il existait une filtration par rapport à laquelle la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale, alors elle serait aussi une martingale par rapport à sa filtration naturelle. Nous allons montrer que ce n'est pas le cas. Pour cela, nous allons calculer l'espérance conditionnelle

$$\mathbf{E}[Y_{n+1}|Y_0,\dots,Y_n].$$

Pour $n=0$, nous avons déjà fait le calcul. Pour $n=1$, la variable aléatoire Y_0 étant déterministe, on a

$$\mathbf{E}[Y_2|Y_0,Y_1] = \mathbf{E}[Y_2|Y_1] = Y_1.$$

Considérons le cas $n=2$. Faisons dans ce cas le calcul, de manière moins formelle qu'à la première question.

Le triplet (Y_0,Y_1,Y_2) peut prendre les valeurs $(0,1,2)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$ et $(0,-1,-2)$. Sur le premier événement, $\varepsilon = 1$ et Y_3 vaut 1 ou 3 avec égales probabilités : sa moyenne est donc 2, c'est-à-dire Y_2. De même, sur le quatrième événement, $\varepsilon = -1$ et la moyenne de Y_3 est égale à -2, c'est-à-dire à Y_2. Par contre, sur le deuxième événement, $\varepsilon = 1$, donc $Y_3 = |X_3| = 1 = Y_1$. De même, sur le troisième événement, $\varepsilon = -1$, donc $Y_3 = -|X_3| = -1 = Y_1$. Finalement,

$$\mathbf{E}[Y_3|Y_0,Y_1,Y_2] = Y_2\mathbf{1}_{\{Y_2\neq 0\}} + Y_1\mathbf{1}_{\{Y_2=0\}}.$$

Cette variable aléatoire n'est pas presque sûrement égale à Y_2, et ceci montre que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas une martingale par rapport à sa filtration naturelle, ni par rapport à aucune autre.

On peut vérifier que de manière générale, on a

$$\mathbf{E}[Y_{n+1}|Y_0,\dots,Y_n] = Y_n\mathbf{1}_{\{Y_n\neq 0\}} + Y_{n-1}\mathbf{1}_{\{Y_n=0\}}.$$

Pour le dire en français, le problème est que pour $n\geqslant 1$, la variable aléatoire ε est mesurable par rapport à $(Y_0,\dots,Y_n)$ (elle vaut le signe de Y_1). Si n est pair, l'événement $Y_n = 0$ est de probabilité strictement positive, et sur cet événement, le signe de Y_{n+1} est "connu" sachant $Y_0,\dots,Y_n$, donc Y_{n+1} lui-même est connu, égal à Y_{n-1} (et à Y_1), qui n'est pas nul.

Cet exercice — dont je reconnais volontiers qu'il n'était pas très facile — a été mal réussi dans l'ensemble. Son but était de montrer, par un exemple, qu'une suite de variables aléatoires intégrables peut vérifier la condition $\mathbf{E}[Y_{n+1}|Y_n] = Y_n$ pour tout $n \geqslant 0$ sans être une martingale, pour aucune filtration.

La première question a été souvent abordée, mais n'a été traitée de manière à peu près convaincante que dans environ une dizaine de copies (sur 130). Il s'agissait pourtant d'un calcul d'espérance conditionnelle, ni plus ni moins. Le barème annonçait 5 points pour chaque question, ce qui laissait d'une part présager qu'elles ne se traitaient pas en trois lignes, et permettait d'autre part d'y consacrer un peu de temps. Pour revenir à la première question, il était difficile de mener le calcul si on n'avait pas une idée de la situation, et de ce qui posait ou non problème. Il ne suffisait pas d'appliquer les unes après les autres les propriétés de l'espérance conditionnelle. En particulier, il était, me semble-t-il, indispensable de considérer à part ce qui se passe sur l'événement $\{Y_n = 0\}$, où le signe ε n'est pas connu. D'ailleurs il a échappé à certains que les lettres ε (epsilon) et ξ (xi) ne sont pas les mêmes, et je saisis cette occasion pour rappeler qu'il est indispensable de savoir lire et écrire les lettres grecques (il y en a 24) pour faire des mathématiques.

La deuxième question n'a presque jamais été traitée, et quand elle l'a été, cela a été le plus souvent pour écrire que oui, la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle. J'ai lu, tout de même, dans une copie, une explication limpide et concise de la raison pour laquelle ce n'est pas le cas.

Exercice 3

Barème indicatif : 10 points (2+2+3+3)

On se donne un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en donnant une démonstration ou un contre-exemple.

1. Si S et T sont deux temps d'arrêt, alors le produit ST est un temps d'arrêt.

2. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale et si T est un temps d'arrêt fini presque sûrement, alors $\mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[X_0]$.

3. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale positive et T un temps d'arrêt fini presque sûrement, alors $\mathbf{E}[X_T] \leqslant \mathbf{E}[X_0]$.

4. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale telle que $\mathbf{P}\big(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\big) > 0$, alors on a aussi $\mathbf{P}\big(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty\big) > 0$.

Solution de l'exercice 3

Cet exercice n'était pas conçu pour être difficile. La forme de questions “vrai ou faux” est certes moins confortable que “montrer que”, mais les questions reposaient sur des notions et des exemples que nous avons longuement étudiés en cours et, pour la dernière question, sur un exemple (ou un contre-exemple) qui est déjà apparu dans un examen et figure depuis dans le fascicule d'exercices. J'ai donc été surpris par la très grande proportion de copies où les questions 2 et 3, en particulier, ont été l'occasion de nombreuses affirmations fausses.

1. C'est vrai. En effet,

$$\{ST = 0\} = \{S = 0\} \cup \{T = 0\} \in \mathscr{F}_0$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\{ST = n\} = \bigcup_{a,b \in \mathbb{N}\,:\,ab=n} \{S = a\} \cap \{T = b\} \quad \in \mathscr{F}_n.$$

Le cas de 0 est particulier, et la vérification que $\{ST = 0\} \in \mathscr{F}_0$ n'a presque jamais été faite. En particulier $\{ST \leqslant n\}$ n'est pas inclus dans $\{S \leqslant n\} \cap \{T \leqslant n\}$, ce qui ne suffirait de toute façon pas à assurer que ST est un temps d'arrêt.

2. C'est faux. Si on prend par exemple pour $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire symétrique simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 1 et si on prend pour T le premier temps d'atteinte de 0, alors T est fini presque sûrement, pourtant $\mathbf{E}[X_T] = 0$ n'est pas égal à $\mathbf{E}[X_0] = 1$.

Cette question, qui repose pourtant sur un exemple qui a été une des motivations de l'étude de la convergence dans L^p des martingales, que nous avons discuté en grand détail, pendant plusieurs semaines et dans plusieurs chapitres du cours, cette question donc, a donné lieu à ce que je ne peux décrire que comme un festival d'affirmations plus fausses les unes que les autres, assorties qui plus est d'erreurs de logique.

C'était une bonne chose de remarquer que le théorème d'arrêt ne s'applique pas au temps T qui n'est pas supposé borné ; mais le fait qu'un théorème ne s'applique pas dans une situation ne montre pas que sa conclusion y est fausse. Par exemple, un théorème affirme que toute suite bornée de nombres réels admet une sous-suite convergente, mais cela n'entraîne pas qu'une suite non bornée n'admette jamais de sous-suite convergente, comme le montre par exemple la suite $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \ldots)$. L'erreur de logique consiste ici à partir d'un théorème qui affirme que "si a est vraie alors b est vraie" et à en déduire que "si a est fausse, alors b est fausse".

Une autre erreur fréquente a été de d'appliquer ce fameux théorème d'arrêt, sans se préoccuper d'une quelconque hypothèse sur T. J'ai parfois lu que T, étant fini presque sûrement, est borné, ce qui est une erreur classique, mais qui révèle une confusion sur des notions qu'il est indispensable de bien distinguer à ce niveau et dans ce cours.

J'ai aussi assez souvent lu des "démonstrations" de l'égalité $\mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[X_0]$ basées sur des applications du théorème de convergence dominée, qui ne pouvait être que mal justifié, puisqu'en fait il ne s'applique pas ici. (A contrario de l'erreur de logique que j'ai relevée plus haut, on peut en effet affirmer ici que les hypothèses du théorème de convergence dominée ne sont pas, ou pas toujours vérifiées, puisque sa conclusion ne l'est pas toujours.)

3. C'est vrai. En effet, le processus $(X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ est une martingale, donc pour tout n, on a $\mathbf{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbf{E}[X_0]$. Puisque T est fini presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, la suite $(X_{T\wedge n})$ converge presque sûrement vers X_T. Puisque toutes les variables aléatoires sont positives, le lemme de Fatou nous donne alors

$$\mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}\big[\,\underline{\lim}\, X_{T\wedge n}\big] \leqslant \underline{\lim}\, \mathbf{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbf{E}[X_0].$$

J'ai lu plusieurs fois que puisque l'affirmation 2 était vraie, l'affirmation 3 l'est aussi, puisque si une quantité est égale à une autre, elle lui est inférieure ou égale. Ce n'est pas faux du point de vue logique, mais peu vraisemblable du point de vue d'une "psychologie élémentaire du sujet d'examen", surtout vu qu'une hypothèse a été ajoutée (la positivité de la martingale). On peut toutefois toujours penser qu'un professeur retors cherchera justement, dans le cadre de ce "vrai ou faux", à prendre en défaut cette psychologie du sujet, bref, il vaut mieux réfléchir que deviner. J'ai même lu une fois que l'assertion 2 était vraie, et la 3 fausse, ce qui, même sans rien savoir

des notions en jeu, est logiquement impossible.
Moins d'une dizaine de copies ont mentionné le lemme de Fatou.

4. C'est faux. En effet, considérons une suite de variables aléatoires indépendantes $(\xi_i)_{i\geqslant 1}$ telles que pour tout $i \geqslant 1$, on ait

$$\mathbf{P}(\xi_i = 1) = 1 - \tfrac{1}{i(i+1)} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\xi_i = -i(i+1)+1) = \tfrac{1}{i(i+1)}.$$

Cette suite est construite de telle manière que toutes les variables aléatoires ξ_i soient d'espérance nulle, et de telle sorte que presque sûrement, à partir d'un certain rang, tous les ξ_i sont égaux à 1 :

$$\mathbf{P}(\exists i_0, \forall i \geqslant i_0, \xi_i = 1) = 1,$$

ce qu'on vérifie en appliquant le lemme de Borel–Cantelli (sans utiliser l'indépendance).

Posons alors $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Alors la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale qui vérifie $\mathbf{P}\big(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\big) = 1$.

Cet exemple d'une martingale nulle au temps 0 et qui tend presque sûrement vers $+\infty$ figure dans le fascicule d'exercices.

Exercice 4

Barème indicatif : 20 points (3+3+4+3+4+3)

On considère l'ensemble $E = \{\ldots, \overrightarrow{-2}, \overrightarrow{-1}, \overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}, \overrightarrow{2}, \ldots\} \cup \{\ldots, \overleftarrow{-2}, \overleftarrow{-1}, \overleftarrow{0}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{2}, \ldots\}$ qui est l'union disjointe de deux copies de $\mathbb{Z}$, dont on distingue les éléments grâce à une flèche vers la droite ou vers la gauche. On se donne deux réels $p, p' \in]0,1[$. On définit sur l'ensemble E le noyau de transition P en posant, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$P\big(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x+1}\big) = p, \;\; P\big(\overrightarrow{x}, \overleftarrow{x-1}\big) = 1-p, \;\; P\big(\overleftarrow{x}, \overleftarrow{x-1}\big) = p', \;\; P\big(\overleftarrow{x}, \overrightarrow{x+1}\big) = 1-p'.$$

1. Montrer que le noyau P est irréductible sur E.

2. Montrer que si μ est une mesure invariante pour P, alors il existe une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on ait $p\mu(\overrightarrow{x}) - p'\mu(\overleftarrow{x}) = c$.

3. Déterminer toutes les mesures invariantes pour P.

4. Déterminer, lorsque $p' \neq p$, en fonction des valeurs de p et de p', si la chaîne de Markov de noyau de transition P est récurrente ou transiente.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (X_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbf{P}_e)_{e\in E})$ une chaîne de Markov sur E de noyau de transition P. On note $\overrightarrow{\mathbb{Z}} = \{\overrightarrow{x} : x \in \mathbb{Z}\}$ et $\overleftarrow{\mathbb{Z}} = \{\overleftarrow{x} : x \in \mathbb{Z}\}$. On définit

$$S = \inf\big\{n \geqslant 0 : X_n \in \overleftarrow{\mathbb{Z}}\big\} \quad \text{et} \quad T = \inf\big\{n \geqslant S : X_n \in \overrightarrow{\mathbb{Z}}\big\}.$$

Pour tout réel $q \in]0,1[$, on dit qu'une variable aléatoire G à valeurs dans $\mathbb{N}$ est de loi géométrique de paramètre q si pour tout entier naturel k, on a $\mathbf{P}(G = k) = q^k(1-q)$.

5. Sous $\mathbf{P}_{\overrightarrow{0}}$, calculer la loi du couple $(S, T-S)$ et montrer que $X_T = \overrightarrow{Y}$, où Y a la loi de la différence de deux variables aléatoires géométriques indépendantes dont on précisera les paramètres.

6. Déterminer, lorsque $p' = p$, en fonction de la valeur de p, si la chaîne de Markov de noyau de transition P est récurrente ou transiente.

On pourra utiliser le fait qu'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ dont la loi de saut est de moyenne nulle est récurrente.

On pourra aussi utiliser la propriété de Markov forte, mais sans se lancer dans des développements trop techniques ni trop longs. Une explication claire et concise de la situation est attendue, plutôt qu'un long calcul.

Solution de l'exercice 4

1. Pour tout entier positif n, on a

$$\overrightarrow{0} \to \overrightarrow{1} \to \ldots \to \overrightarrow{n} \to \overleftarrow{n-1} \to \overleftarrow{n-2} \to \ldots \to \overleftarrow{-n} \to \overrightarrow{-n+1} \to \ldots \to \overrightarrow{-1} \to \overrightarrow{0}.$$

Ceci montre que $\overrightarrow{0}$ communique avec tout état de $\{\overrightarrow{-n+1}, \ldots, \overrightarrow{n}\}$ et tout état de $\{\overleftarrow{-n}, \ldots, \overleftarrow{n-1}\}$. Comme ceci est vrai pour tout n, l'état $\overrightarrow{0}$ communique avec E tout entier, qui est donc irréductible. (Rappelons qu'on dit que deux états x et y communiquent si x mène à y et y mène à x.)

Cette question a été assez bien traitée en général.

2. Soit μ une mesure invariante pour P. Soit x un entier relatif. On peut arriver en $\overrightarrow{x+1}$ depuis $\overrightarrow{x}$ ou depuis $\overleftarrow{x}$, ce qui donne la relation

$$\mu(\overrightarrow{x+1}) = p\mu(\overrightarrow{x}) + (1-p')\mu(\overleftarrow{x}). \tag{1}$$

D'autre part, on peut arriver en $\overleftarrow{x}$ depuis $\overleftarrow{x+1}$ ou depuis $\overrightarrow{x+1}$, et nous avons la relation

$$\mu(\overleftarrow{x}) = p'\mu(\overleftarrow{x+1}) + (1-p)\mu(\overrightarrow{x+1}). \tag{2}$$

La première relation nous donne

$$\mu(\overrightarrow{x+1}) - \mu(\overleftarrow{x}) = p\mu(\overrightarrow{x}) - p'\mu(\overleftarrow{x})$$

et la deuxième nous donne

$$\mu(\overrightarrow{x+1}) - \mu(\overleftarrow{x}) = p\mu(\overrightarrow{x+1}) - p'\mu(\overleftarrow{x+1}).$$

En comparant ces deux relations, on trouve l'égalité

$$p\mu(\overrightarrow{x+1}) - p'\mu(\overleftarrow{x+1}) = p\mu(\overrightarrow{x}) - p'\mu(\overleftarrow{x}),$$

qui, puisqu'elle est vraie pour tout x, entraîne le résultat.

La lourdeur des notations de cet exercice a fait que très peu de gens sont parvenus à une solution de cette question. J'ai souvent lu les équations correctes qui caractérisent une mesure invariante ; parfois des équations incorrectes. Certain(e)s ont cherché des mesures réversibles, ce qui de manière générale est une bonne idée, mais qui ne fonctionne pas dans cet exemple, où il n'y en a pas. Ce qui est plus embêtant est que certains ont pensé en avoir trouvé.

3. Soit μ une mesure invariante. Quitte à multiplier μ par une constante strictement positive non nulle, on peut supposer que la constante c dont nous venons de démontrer l'existence vaut soit 0 soit 1.

Supposons d'abord que $c = 0$. Alors la relation (1) devient

$$\mu(\overrightarrow{x+1}) = p\mu(\overrightarrow{x}) + (1-p')\tfrac{p}{p'}\mu(\overrightarrow{x}) = \tfrac{p}{p'}\mu(\overrightarrow{x})$$

qui se résout immédiatement en

$$\mu(\overrightarrow{x}) = a\big(\tfrac{p}{p'}\big)^x \quad \text{et} \quad \mu(\overleftarrow{x}) = a\big(\tfrac{p}{p'}\big)^{x+1},$$

où a est une constante réelle positive non nulle arbitraire.

On vérifie que pour toute valeur de a (il suffit de le faire pour une), la mesure μ ainsi définie vérifie bien les relations (1) et (2), et est donc bien une mesure invariante pour P.

Supposons maintenant que $c = 1$. Dans ce cas, $\mu(\overleftarrow{x}) = \frac{p}{p'}\mu(\overrightarrow{x}) - \frac{1}{p'}$ et la relation (1) devient

$$\mu(\overrightarrow{x+1}) = \tfrac{p}{p'}\mu(\overrightarrow{x}) - \tfrac{1-p'}{p'}.$$

Si $p = p'$, cette équation n'admet aucune solution telle que $\mu(\overrightarrow{x})$ soit positive pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Supposons donc $p \neq p'$. Dans ce cas, on écrit

$$\tfrac{1-p'}{p'} = \big(\tfrac{p}{p'} - 1\big)\tfrac{1-p'}{p-p'}$$

de manière à ce que l'équation précédente devienne

$$\mu(\overrightarrow{x+1}) - \tfrac{1-p'}{p-p'} = \tfrac{p}{p'}\big(\mu(\overrightarrow{x}) - \tfrac{1-p'}{p-p'}\big).$$

Les solutions de cette équation sont données par

$$\mu(\overrightarrow{x}) = a\big(\tfrac{p}{p'}\big)^x + \tfrac{1-p'}{p-p'} \quad \text{et} \quad \mu(\underline{x}) = a\big(\tfrac{p}{p'}\big)^{x+1} + \tfrac{1-p}{p-p'},$$

avec $a \geqslant 0$ et on vérifie que la mesure ainsi définie est bien invariante.

Finalement, les mesures invariantes de P sont données par

$$\mu(\overrightarrow{x}) = a\big(\tfrac{p}{p'}\big)^x + b(1-p') \quad \text{et} \quad \mu(\underline{x}) = a\big(\tfrac{p}{p'}\big)^{x+1} + b(1-p)$$

avec a et b réels positifs non tous deux nuls.

Si $p = p'$, ces mesures se réduisent aux mesures données par

$$\mu(\overrightarrow{x}) = \mu(\overleftarrow{x}) = a$$

avec $a > 0$.

Personne n'est parvenu à déterminer les mesures invariantes. Ce n'était pas vraiment difficile, mais cela demandait de mener des calculs un peu incommodes, et donc un calme qu'on n'a pas facilement pendant un examen — et aussi un soin que certain(e)s sont loin d'avoir (j'en reparlerai dans les commentaires généraux à la fin du corrigé).

4. Si $p \neq p'$, nous avons trouvé deux mesures invariantes non proportionnelles pour le noyau P, qui est irréductible. Ceci prouve qu'il est transient.

Sans savoir que pour $p \neq p'$, la chaîne admet deux mesures invariantes non proportionnelles, il n'était pas facile de montrer qu'elle est transiente. J'ai lu toutes sortes de réponses et d'arguments à cet endroit.

5. Sous $\mathbf{P}_{\overrightarrow{0}}$, on a $S \geqslant 1$ et $T - S \geqslant 1$. Pour tous entiers $k, l \geqslant 1$, on a

$$\{S = k, T - S = l\} \cap \{X_0 = \overrightarrow{0}\} = \{X_0 = \overrightarrow{0}, \dots, X_{k-1} = \overrightarrow{k-1}, X_k = \overleftarrow{k-2}, \dots$$
$$\dots, X_{k+l-1} = \overleftarrow{k-l-1}, X_{k+l} = \overrightarrow{k-l}\}.$$

Cette égalité nous montre d'une part que sous $\mathbf{P}_{\vec{0}}$, on a $X_T = \overrightarrow{S-(T-S)}$ presque sûrement, et d'autre part que

$$\mathbf{P}_{\vec{0}}(S=k, T-S=l) = p^{k-1}(1-p)(p')^{l-1}(1-p'),$$

c'est-à-dire que $(S, T-S)$ a même loi que $(G+1, G'+1)$, où G et G' sont deux variables aléatoire géométriques de paramètres respectifs p et p'.

La variable aléatoire $Y = S-(T-S)$ a donc même loi que $G+1-(G'-1) = G-G'$, c'est-à-dire même loi que la différence de deux variables aléatoires géométriques indépendantes de paramètres p et p'.

Cette question est la dernière a avoir été traitée dans un nombre significatif de copies, et jamais, ou très rarement, avec suffisamment de précision pour voir apparaître le décalage de 1 des lois géométriques.

6. Définissons une suite de temps d'arrêt en posant $T_0 = 0$, puis pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = \inf\{n \geqslant T_{n-1} : X_n \in \overleftarrow{\mathbb{Z}}\} \text{ et } T_n = \inf\{n \geqslant S_n : X_n \in \overrightarrow{\mathbb{Z}}\}.$$

Alors une application de la propriété de Markov forte qu'il n'était pas attendu d'expliciter montre que $(X_{T_n})_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov, et plus précisément que

$$X_{T_n} = \overrightarrow{Y_n}$$

où $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ dont la loi de saut est la différence de deux variables aléatoires géométriques de paramètres respectifs p et p'.

Si $p = p'$, cette loi de saut est centrée, et le fait rappelé dans l'énoncé assure que cette marche aléatoire est récurrente. Ainsi, partant de 0, il est presque sûr qu'elle y revienne. En conséquence,

$$\mathbf{P}_{\vec{0}}(\exists n \geqslant 1 : X_{T_n} = \vec{0}) = 1$$

et en particulier

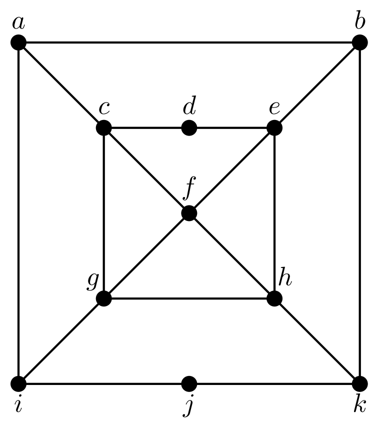
$$\mathbf{P}_{\vec{0}}(\exists n \geqslant 1 : X_n = \vec{0}) = 1.$$

Ainsi, si $p = p'$, l'état $\vec{0}$ est récurrent, et donc toute la chaîne de Markov, est récurrente.

Exercice 5

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On étudie la marche aléatoire sur le graphe représenté ci-dessous.



1. Montrer que cette marche aléatoire admet une unique mesure de probabilité invariante, qu'on notera π, et calculer $\pi(a)$, $\pi(d)$ et $\pi(f)$.

2. On fait partir la marche aléatoire de l'état e. Après combien de temps en moyenne la marche aléatoire revient-elle en e pour la première fois ?

3. On fait partir la marche aléatoire de l'état j. Combien de fois en moyenne la marche visite-t-elle le sommet d avant de revenir pour la première fois à son point de départ ?

4. Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire issue de a. Posons $M = \{c, e, g, h\}$. La quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_M(X_i)$$

admet-elle sous $\mathbf{P}_a$ une limite presque sûre lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

5. Soit u une fonction à valeurs réelles sur l'ensemble des sommets de notre graphe. La quantité

$$\mathbf{E}_a[u(X_n)]$$

admet-elle une limite lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

Solution de l'exercice 5

Mises à part les inévitables erreurs de décompte des arêtes, et de réduction des fractions (non, 36 divisé par 3 ne fait pas 13, contrairement à ce que j'ai lu plusieurs fois), cet exercice a le plus souvent été très bien traité quand il a été abordé. Ce qui m'a étonné est qu'il ne soit pas systématiquement et parfaitement traité dans une immense majorité des copies, alors qu'une étude rapide de la quinzaine de sujets des sessions précédentes disponibles sur la page du cours montre que le dernier exercice de l'examen est *toujours* le même, avec les mêmes questions, dans la même ordre, simplement sur un graphe qui change à chaque fois. Il s'agit de 10 points qui sont, littéralement, *donnés*, mais encore faut-il les prendre.

1. Le graphe est connexe, donc la marche aléatoire sur ce graphe est une chaîne de Markov irréductible. Tous les états sont donc de même nature (récurrents ou transients), et comme l'espace d'états est fini, l'un d'entre eux est récurrent, donc ils sont tous récurrents. La chaîne admet donc une mesure invariante unique à multiplication près par une constante strictement positive, donc une unique mesure de probabilité invariante.

Pour déterminer cette probabilité invariante, on utilise le fait que la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible, donc invariante, pour la marche aléatoire sur le graphe. Cette mesure associe respectivement les masses 3, 2 et 4 aux sommets a, d et f.

La masse totale de cette mesure est 36 (c'est deux fois le nombre d'arêtes). Ainsi, les masses des sommets a, d, f pour l'unique probabilité invariante π sont

$$\pi(a) = \frac{1}{12},\ \pi(b) = \frac{1}{18},\ \pi(f) = \frac{1}{9}.$$

2. Le temps moyen de retour est donné par l'inverse de la masse attribuée par la probabilité invariante :

$$\mathbf{E}_e[T_e] = \frac{1}{\pi(e)} = 9.$$

3. L'unique mesure invariante ν qui associe à j la masse 1 associe à chaque autre sommet une masse égale au nombre moyen de visites en ce sommet entre deux visites en j. On a $\nu = \pi/\pi(j)$, donc le nombre moyen de visites en d entre deux visites en j vaut

$$\nu(d) = \frac{\pi(d)}{\pi(j)} = 1.$$

4. Puisque la chaîne est irréductible et récurrente, le théorème ergodique assure que la quantité considérée converge $\mathbf{P}_a$-presque sûrement vers

$$\pi(M) = \frac{4}{9}.$$

5. Partant de a, on peut y revenir en 2 pas ou en 5 pas. L'état a, et donc tout la chaîne, est donc apériodique. Le théorème de convergence vers l'équilibre s'applique donc, et on a la convergence

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_a[f(X_n)] = \int_{\{a,\dots,k\}} f \; \mathrm{d}\pi.$$

Commentaires généraux. Cet examen a été, dans l'ensemble, mal réussi : la moyenne des notes brutes était inférieure à 19 sur 65 (elles ont ensuite été multipliées par une constante légèrement supérieure à 1).[1] Je m'étais pourtant attendu à ce que dans une large majorité des copies soient traitées au moins : trois questions de l'exercice 1 (par exemple, les questions 1, 3 ou 4, et 5), deux questions de l'exercice 3 (les questions 1 et 2), une partie de l'exercice 4 (la question 1 et une partie de la question 2), et l'exercice 5. En traitant ces questions, qui restaient dans le cœur des notions et des techniques que nous avons étudiées (calcul d'une espérance conditionnelle, définition d'un temps d'arrêt, exemple fondamental de martingale arrêtée, chaîne de Markov irréductible, définition d'une mesure invariante, et le fameux exercice 5), on obtenait 27 points, presque une fois et demie la moyenne que j'ai observée.

De ce constat, je tire plusieurs conclusions concernant l'enseignement du cours, que je ne détaillerai pas ici. Je pense aussi que ce sujet manquait de questions très faciles, sur lesquelles prendre appui et confiance (à part l'exercice 5, tout de même).

Un dernier point que je veux évoquer est celui de l'écriture. J'ai trouvé qu'un nombre de copies plus grand que d'habitude étaient si mal écrites qu'il m'était parfois littéralement impossible de savoir ce qui y était écrit à certains endroits. Je pense qu'un minimum d'hygiène graphique est nécessaire d'abord pour la personne qui écrit, pour lui permettre de réfléchir (et l'exercice 4 était un bon exemple de cette nécessité : les notations y étant un peu lourdes, il était nécessaire, pour pouvoir avancer, d'écrire les choses de manière un tant soit peu lisible et organisée), ensuite évidemment pour la personne qui lit : l'écriture est un moyen de communication. Et lorsque je n'arrive pas à lire, je ne lis pas, et ne mets pas de points.

Pour aider celles et ceux qui voudraient améliorer cet aspect, je propose un certain nombre d'éléments concrets.

- Utilisez un outil (stylo bille, plume, feutre) dont vous avez l'habitude. (Et d'ailleurs, n'utilisez de préférence pas un crayon de papier.) Entraînez-vous à écrire. Entraînez-vous à écrire à peu près droit sur une feuille blanche.

1. Cette constante vaut 1,15. La moyenne des notes d'examen est de 21,5/50. La moyenne des notes finales à cette UE est 51,5/100. Sur 128 étudiant(e)s ayant passé l'examen, 69 valident l'UE, soit 54%.

- Apprenez à barrer correctement. Des erreurs arrivent, c'est normal. Mais ne surchargez pas pour rectifier, et n'abusez pas du fluide correcteur blanc. Vous avez écrit X au lieu de Y, ou bien $+$ au lieu de $-$? Rayez proprement et réécrivez.
- Apprenez à écrire les lettres, minuscules et majuscules, latines et grecques. Faites attention à la taille des lettres, à leur position par rapport à la position de la ligne d'écriture. [2] Ceci vaut aussi pour les symboles mathématiques.
- N'oubliez pas que vous écrivez pour être lu(e).

En conclusion, je dirai, pour guider les révisions à venir, que l'exercice 5 restera l'exercice 5, et qu'une tendance se dégage depuis quelques sessions d'avoir un exercice 1 qui consiste en des calculs d'espérances conditionnelles. Je pense qu'apprendre à faire ces calculs doit constituer une part importante du travail d'étude en lien avec ce cours. J'ajoute qu'il est souvent utile de faire un exercice, ou un calcul, plusieurs fois.

—————— FIN DU SUJET ——————

2. Quelle différence y a-t-il, par exemple, entre u et μ, entre ρ et P, entre u et U, entre 2 et Z ? Entre ξ et ζ, entre ε et ξ ?