Examen

L'épreuve dure trois heures.
Les cinq exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
La note finale sera sur 50 points.
Le sujet occupe trois pages.

Exercice 1

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

1. Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 2]$. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[U \,|\, U^2]$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. Soient S et Θ deux variables aléatoires indépendantes telles que S est de loi exponentielle de paramètre 1, et Θ de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a. Démontrer que les couples (X, Y) et $(\sqrt{2S}\cos\Theta, \sqrt{2S}\sin\Theta)$ ont même loi.

b. On note $N_1 = |X| + |Y|$ et $N_2 = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Calculer $\mathbf{E}[N_1 \,|\, N_2]$.

3. Soit V une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On note $Z = \left\lfloor \frac{1}{V} \right\rfloor$ la partie entière de $\frac{1}{V}$. Calculer $\mathbf{E}[V \,|\, Z]$.

4. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que B est de loi exponentielle de paramètre 1. Calculer $\mathbf{E}[\cos(A^2 + AB) \,|\, A]$.

5. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, xy > 1\}$. On note (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, la densité f donnée par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = c\, \mathbf{1}_D(x, y)\, e^{-x-y},$$

pour une certaine constante réelle c. Calculer $\mathbf{E}[Y \,|\, X]$.

Exercice 2

Barème indicatif : 10 points (5+5)

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. Soient ε et $(\xi_i)_{i\geqslant 1}$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, vérifiant $\mathbf{P}(\varepsilon = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = \mathbf{P}(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \geqslant 1$. On définit une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires en posant $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose enfin $Y_n = \varepsilon\, |X_n|$.

1. Calculer, pour tout $n \geqslant 0$, l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[Y_{n+1} \,|\, Y_n]$.

2. Existe-t-il une filtration sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ par rapport à laquelle la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale ?

Exercice 3

Barème indicatif : 10 points (2+2+3+3)

On se donne un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en donnant une démonstration ou un contre-exemple.

1. Si S et T sont deux temps d'arrêt, alors le produit ST est un temps d'arrêt.

2. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale et si T est un temps d'arrêt fini presque sûrement, alors $\mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[X_0]$.

3. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale positive et T un temps d'arrêt fini presque sûrement, alors $\mathbf{E}[X_T] \leqslant \mathbf{E}[X_0]$.

4. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale telle que $\mathbf{P}\big(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\big) > 0$, alors on a aussi $\mathbf{P}\big(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty\big) > 0$.

Exercice 4

Barème indicatif : 20 points (3+3+4+3+4+3)

On considère l'ensemble $E = \{\ldots, \overrightarrow{-2}, \overrightarrow{-1}, \overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}, \overrightarrow{2}, \ldots\} \cup \{\ldots, \overleftarrow{-2}, \overleftarrow{-1}, \overleftarrow{0}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{2}, \ldots\}$ qui est l'union disjointe de deux copies de $\mathbb{Z}$, dont on distingue les éléments grâce à une flèche vers la droite ou vers la gauche. On se donne deux réels $p, p' \in]0,1[$. On définit sur l'ensemble E le noyau de transition P en posant, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$P\big(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x+1}\big) = p,\ P\big(\overrightarrow{x}, \overleftarrow{x-1}\big) = 1-p,\ P\big(\overleftarrow{x}, \overleftarrow{x-1}\big) = p',\ P\big(\overleftarrow{x}, \overrightarrow{x+1}\big) = 1-p'.$$

1. Montrer que le noyau P est irréductible sur E.

2. Montrer que si μ est une mesure invariante pour P, alors il existe une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on ait $p\mu(\overrightarrow{x}) - p'\mu(\overleftarrow{x}) = c$.

3. Déterminer toutes les mesures invariantes pour P.

4. Déterminer, lorsque $p' \neq p$, en fonction des valeurs de p et de p', si la chaîne de Markov de noyau de transition P est récurrente ou transiente.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (X_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbf{P}_e)_{e\in E})$ une chaîne de Markov sur E de noyau de transition P. On note $\overrightarrow{\mathbb{Z}} = \{\overrightarrow{x} : x \in \mathbb{Z}\}$ et $\overleftarrow{\mathbb{Z}} = \{\overleftarrow{x} : x \in \mathbb{Z}\}$. On définit

$$S = \inf\big\{n \geqslant 0 : X_n \in \overleftarrow{\mathbb{Z}}\big\} \quad \text{et} \quad T = \inf\big\{n \geqslant S : X_n \in \overrightarrow{\mathbb{Z}}\big\}.$$

Pour tout réel $q \in]0,1[$, on dit qu'une variable aléatoire G à valeurs dans $\mathbb{N}$ est de loi géométrique de paramètre q si pour tout entier naturel k, on a $\mathbf{P}(G = k) = q^k(1-q)$.

5. Sous $\mathbf{P}_{\overrightarrow{0}}$, calculer la loi du couple $(S, T-S)$ et montrer que $X_T = \overrightarrow{Y}$, où Y a la loi de la différence de deux variables aléatoires géométriques indépendantes dont on précisera les paramètres.

6. Déterminer, lorsque $p' = p$, en fonction de la valeur de p, si la chaîne de Markov de noyau de transition P est récurrente ou transiente.

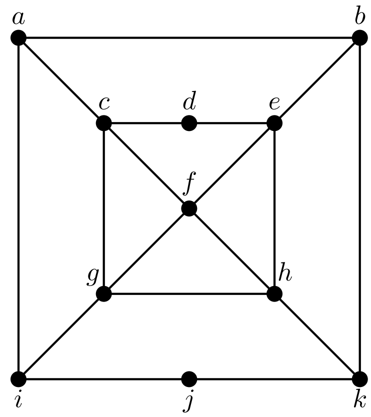
On pourra utiliser le fait qu'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ dont la loi de saut est de moyenne nulle est récurrente.

On pourra aussi utiliser la propriété de Markov forte, mais sans se lancer dans des développements trop techniques ni trop longs. Une explication claire et concise de la situation est attendue, plutôt qu'un long calcul.

Exercice 5

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On étudie la marche aléatoire sur le graphe représenté ci-dessous.



1. Montrer que cette marche aléatoire admet une unique mesure de probabilité invariante, qu'on notera π, et calculer $\pi(a)$, $\pi(d)$ et $\pi(f)$.

2. On fait partir la marche aléatoire de l'état e. Après combien de temps en moyenne la marche aléatoire revient-elle en e pour la première fois ?

3. On fait partir la marche aléatoire de l'état j. Combien de fois en moyenne la marche visite-t-elle le sommet d avant de revenir pour la première fois à son point de départ ?

4. Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire issue de a. Posons $M = \{c, e, g, h\}$. La quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_M(X_i)$$

admet-elle sous $\mathbf{P}_a$ une limite presque sûre lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

5. Soit u une fonction à valeurs réelles sur l'ensemble des sommets de notre graphe. La quantité

$$\mathbf{E}_a[u(X_n)]$$

admet-elle une limite lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

——— Fin du sujet ———