Examen – Partie 1

Cette première partie de l'épreuve dure quarante-cinq minutes.
On traitera les trois questions de cours ci-dessous.
Elle comptera pour un quart de la note.
Aucun document n'est autorisé.

Question de cours 1

On rappelera la signification des mots soulignés.

Montrer qu'une mesure de probabilité borélienne sur un espace polonais est tendue.

Question de cours 2

On rappelera la signification des mots soulignés.

Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que la fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ prend ses valeurs dans $]0, +\infty]$ et que la fonction $\lambda \mapsto \log \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ est convexe.

Question de cours 3

On rappelera la signification des mots soulignés.

On se donne un entier $d \geqslant 1$, un réel $p \in [0, 1]$ et on note $\theta_d(p)$ la probabilité de percolation pour le modèle de percolation par arêtes sur le réseau $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ avec paramètre $p \in [0, 1]$. Montrer que si $\theta_d(p) = 0$, alors il n'y a, presque sûrement, aucun agrégat infini dans la configuration de percolation.

——— Fin de la partie 1 ———

Examen – Partie 2

Les quatre exercices sont indépendants.
Cette deuxième partie de l'épreuve dure deux heures trente.
La consultation des notes de cours et du polycopié est autorisée.

Exercice 1

Cet exercice est a un énoncé long, mais il est moins difficile qu'il n'en a peut-être l'air.
Je vous recommande en particulier d'aborder au moins les questions **1**, **2**, **3**, **4**, *et* **6**.
Cet exercice aura dans le barême un poids environ double par rapport aux autres exercices.

Soit E un ensemble. On dit qu'une classe $\mathscr{A}$ de parties de E est une *algèbre* si elle vérifie les propriétés suivantes :

i. $E \in \mathscr{A}$ et $\varnothing \in \mathscr{A}$
ii. $\forall A \in \mathscr{A}$, $A^c \in \mathscr{A}$
iii. $\forall A, B \in \mathscr{A}$, $A \cup B \in \mathscr{A}$ et $A \cap B \in \mathscr{A}$

Soit $\mathscr{A}$ une classe de parties de E qui est une algèbre. Soit $\mathsf{m} : \mathscr{A} \to [0,1]$ une fonction. On dit que m est *additive* si pour tous $A, B \in \mathscr{A}$ tels que $A \cap B = \varnothing$, on a $\mathsf{m}(A \cup B) = \mathsf{m}(A) + \mathsf{m}(B)$.

On dit que m est σ*-additive* si pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n$ appartienne à $\mathscr{A}$, on a $\mathsf{m}(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) = \sum_{n\geqslant 1} \mathsf{m}(A_n)$.

Soit E un ensemble et $\mathscr{A}$ une classe de parties de E qui est une algèbre.

1. Soit $\mathsf{m} : \mathscr{A} \to [0,1]$ une fonction σ-additive. Calculer $\mathsf{m}(\varnothing)$ et montrer que m est additive.

2. Soit $\mathsf{m} : \mathscr{A} \to [0,1]$ une fonction additive. Montrer que m est σ-additive si et seulement si pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n = \varnothing$, on a $\lim_{n\to\infty} \mathsf{m}(A_n) = 0$.

Soit (F, d) un espace métrique polonais. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on se donne une mesure de probabilité borélienne μ_n sur $F^n = F \times \ldots \times F$ (n fois). On définit pour tout $n \geqslant 1$ l'application $p_n : F^{n+1} \to F^n$ en posant $p_n(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$ et on suppose que pour tout $n \geqslant 1$, on a l'égalité $\mu_{n+1} \circ p_n^{-1} = \mu_n$.

On définit $E = F^{\mathbb{N}^*} = \{(x_i)_{i\geqslant 1} : \forall i \geqslant 1, x_i \in F\}$ l'ensemble des suites d'éléments de F indexées par $\mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit $\pi_n : E \to F^n$ par $\pi_n\big((x_i)_{i\geqslant 1}\big) = (x_1, \ldots, x_n)$ et on définit sur E la tribu $\mathscr{A}_n = \sigma(\pi_n)$. Enfin, on pose $\mathscr{A} = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathscr{A}_n$.

3. Montrer que $\mathscr{A}$ est une algèbre de parties de E.

4. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que pour tout borélien B de F^n, on a $B = \pi_n(\pi_n^{-1}(B))$.

5. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient B_n un borélien de F^n et B_{n+1} un borélien de F^{n+1}. On suppose que $\pi_{n+1}^{-1}(B_{n+1}) = \pi_n^{-1}(B_n)$. Montrer que $p_n^{-1}(B_n) = B_{n+1}$ puis que $\mu_{n+1}(B_{n+1}) = \mu_n(B_n)$.

On admettra que pour tous entiers $n, r \geqslant 1$ et tous boréliens B_n de F^n et B_r de F^r tels que $\pi_r^{-1}(B_r) = \pi_n^{-1}(B_n)$, on a l'égalité $\mu_r(B_r) = \mu_n(B_n)$. (La question **5** traite le cas où $r = n+1$.)

Soit A un élément de $\mathscr{A}$. Par définition de $\mathscr{A}$, il existe un entier $n \geqslant 1$ et un borélien B_n de F^n tels que $A = \pi_n^{-1}(B_n)$. Cette écriture de A n'est pas unique, mais d'après ce qui précède, le nombre $\mu_n(B_n)$ ne dépend pas de l'écriture choisie, et on pose $\mathsf{m}(A) = \mu_n(B_n)$. Ce faisant, on définit une fonction $\mathsf{m} : \mathscr{A} \to [0,1]$. On va montrer, dans les trois prochaines questions, qu'elle est σ-additive, en utilisant la condition établie à la question **2**.

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n = \varnothing$. On fait l'hypothèse que

$$\forall n \geqslant 1, \quad A_n \in \mathscr{A}_n \tag{H}$$

et on écrit $A_n = \pi_n^{-1}(B_n)$, où B_n est un borélien de F^n. On fixe un réel $\varepsilon > 0$.

6. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe un compact K_n de F^n tel que $K_n \subseteq B_n$ et $\mu_n(B_n \setminus K_n) < 2^{-(n+1)}\varepsilon$.

7. Montrer en utilisant un procédé d'extraction diagonale que si pour tout $n \geqslant 1$ on avait $\pi_1^{-1}(K_1) \cap \ldots \cap \pi_n^{-1}(K_n) \neq \varnothing$, alors on aurait aussi $\bigcap_{n\geqslant 1} \pi_n^{-1}(K_n) \neq \varnothing$, et montrer que cette conclusion est absurde.

8. Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $\pi_1^{-1}(K_1) \cap \ldots \cap \pi_n^{-1}(K_n) = \varnothing$. Montrer que

$$K_n \subseteq \bigcup_{r=1}^{n-1} (p_r \circ \cdots \circ p_{n-1})^{-1}(B_r \setminus K_r)$$

et en déduire que $\mu_n(B_n) \leqslant \varepsilon$. Déduire de ce qui précède que $\lim_{n\to\infty} \mathsf{m}(A_n) = 0$.

On admet que la conclusion de la question **8** reste vraie sans l'hypothèse (H), pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n = \varnothing$.

9. Appliquer le théorème énoncé ci-dessous, qu'on admettra, à la situation étudiée dans ce problème. Quel résultat a-t-on (re)démontré ?

Théorème — *Soit E un ensemble et $\mathscr{A}$ une classe de parties de E qui est une algèbre. Soit $\mathsf{m} : \mathscr{A} \to [0,1]$ une fonction σ-additive. Il existe une unique mesure μ sur l'espace mesurable $(E, \sigma(\mathscr{A}))$ telle que pour tout $A \in \mathscr{A}$, on ait $\mu(A) = \mathsf{m}(A)$.*

Exercice 2

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, admettant un moment d'ordre 4, centrées et de variance 1.

1. Montrer qu'il existe un réel C tel que pour tout $n \geqslant 1$, on ait $\mathbb{E}\big[(X_1 + \ldots + X_n)^4\big] \leqslant Cn^2$.

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout réel $u \geqslant 0$, de partie entière $\lfloor u \rfloor$, on note

$$S_u = X_1 + \ldots + X_{\lfloor u \rfloor} + (u - \lfloor u \rfloor) X_{\lfloor u \rfloor + 1}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit une variable aléatoire M_n à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ en posant, pour tout $t \in [0,1]$,

$$M_{n,t} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}.$$

2. Montrer en utilisant le critère de Kolmogorov que la suite des lois des variables aléatoires $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est tendue.

Exercice 3

1. Étudier et représenter la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \log x - x + 1$.

Soit $\alpha > 0$ un réel. On rappelle que la loi de Poisson de paramètre α est la mesure de probabilité μ sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, on ait $\mu(\{n\}) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}$.

2. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre α. Calculer la fonction $\lambda \mapsto \log \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$, puis sa transformée de Legendre. Représenter cette transformée de Legendre.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre α. On pose $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. Quelle information donne le théorème de Cramér sur le comportement asymptotique de la probabilité $\mathbb{P}\big(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \in A\big)$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 4

Sur le réseau carré $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, avec $d \geqslant 2$, on considère non pas la percolation par arêtes, mais la percolation par sites, définie comme suit. On se donne un réel $p \in [0, 1]$, et une collection de variables aléatoires $(\sigma_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$, indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre p. On dit qu'un sommet x est ouvert si $\sigma_x = 1$, et fermé si $\sigma_x = 0$.

On appelle *agrégat* d'un sommet x l'ensemble des sommets qui sont accessibles depuis x par un chemin qui n'emprunte que des sommets ouverts. Si x est fermé, on convient que cet agrégat est vide.

On définit $\theta_d(p) = \mathbb{P}(\text{l'agrégat de l'origine est infini})$ et $p_c(d) = \sup\{p \in [0, 1] : \theta_d(p) = 0\}$.

1. Donner une minoration de $p_c(d)$.

2. Montrer que $p_c(d) \leqslant p_c(2)$.

On s'intéresse au cas où $d = 2$. L'argument de dualité qui permet de montrer, pour la percolation par arêtes, que la valeur critique du paramètre est strictement inférieure à 1, ne s'adapte pas directement au cas de la percolation par sites.

3. *Dans cette question, je n'attends pas une démonstration. La réponse suffit, avec un dessin qui vous convainc (et moi aussi) que c'est la bonne.*

En ajoutant des arêtes au graphe $\mathbb{L}^2$, construire un graphe $G = (\mathbb{Z}^2, E)$ tel qu'on ait l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

— l'agrégat de l'origine est fini dans $\mathbb{L}^2$,

— il existe un cycle qui entoure l'origine dans G et qui ne passe que par des sommets fermés.

Il est ici entendu que les sommets ouverts (resp. fermés) sont les mêmes dans $\mathbb{L}^2$ et dans G.

4. Montrer que $0 < p_c(d) < 1$ pour tout $d \geqslant 2$.

Question subsidiaire. Comment pensez-vous que se comparent $p_c(2)$ et $\frac{1}{2}$?

——————— FIN DE LA PARTIE 2 ———————