Sorbonne Université **2023 – 2024**
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires **17 janvier 2024**

Convergence de mesures — Grandes déviations — Percolation

Examen – Partie 1

Cette première partie de l'épreuve dure quarante-cinq minutes.
On traitera les trois questions de cours ci-dessous.
Elle comptera pour un quart de la note.
Aucun document n'est autorisé.

Question de cours 1

On rappelera la signification des mots soulignés.

Montrer qu'une mesure de probabilité borélienne sur un espace métrique (E, d) est régulière extérieurement.

Question de cours 2

On rappelera brièvement la signification des mots soulignés.

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, admettant des moments exponentiels de tous ordres, et d'espérance nulle. Soit $x > 0$ un réel. Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \geqslant nx) \leqslant e^{-nc}.$$

Question de cours 3

On rappelera la signification des mots soulignés.

On se donne un entier $d \geqslant 1$ et on considère le modèle de percolation par arêtes sur le réseau $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, avec un paramètre $p \in [0, 1]$. Montrer que si un événement de percolation A est invariant par translations, alors $\mathbb{P}_p(A)$ vaut 0 ou 1.

— Fin de la partie 1 —

Examen – Partie 2

Les quatre exercices sont indépendants.
Les exercices auront des poids comparables dans la note.
Cette deuxième partie de l'épreuve dure deux heures trente.
La consultation des notes de cours et du polycopié est autorisée.

Exercice 1

Soit (E, d) un espace métrique non vide. Pour tout $x \in E$ et toute partie A de E, on rappelle qu'on note $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$. Pour toute partie A de E et tout réel $r \geqslant 0$, on pose $A_r = \{x \in E : d(x, A) \leqslant r\}$.

On note $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des parties compactes non vides de E. Pour tous $K, L \in \mathcal{K}(E)$, on pose

$$\delta(K, L) = \max(\sup\{d(x, L) : x \in K\}, \sup\{d(x, K) : x \in L\}).$$

1. Montrer que pour tous $x \in E$ et tous $K, L \in \mathcal{K}(E)$, on a $|d(x, K) - d(x, L)| \leqslant \delta(K, L)$.

2. Montrer que $(\mathcal{K}(E), \delta)$ est un espace métrique non vide.

3. Montrer que pour tous $K, L \in \mathcal{K}(E)$, on a $\delta(K, L) = \inf\{r \geqslant 0 : K \subseteq L_r \text{ et } L \subseteq K_r\}$.

4. On suppose dans cette question que (E, d) est séparable et on se donne une partie D de E dénombrable et dense. Montrer que pour tout $K \in \mathcal{K}(E)$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F non vide de D telle que $\delta(K, F) < \varepsilon$. En déduire que $(\mathcal{K}(E), \delta)$ est séparable.

5. Montrer que si (E, d) est précompact, alors $(\mathcal{K}(E), \delta)$ est précompact.

La question suivante est plus difficile, je vous conseille de ne l'aborder que s'il vous reste du temps après avoir traité les autres exercices.

6. Soit $(K_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{K}(E), \delta)$. Pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in E$, on pose $f_n(x) = \min(d(x, K_n), 1)$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{C}_b(E), \|\cdot\|_\infty)$. Qu'a-t-on envie de définir maintenant ? Proposer un énoncé, ajouter au besoin des hypothèses sur (E, d), et le démontrer.

Exercice 2

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, admettant un moment d'ordre 4, centrées et de variance 1. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout réel $u \geqslant 0$, de partie entière $\lfloor u \rfloor$, on note

$$S_u = X_1 + \ldots + X_{\lfloor u \rfloor} + (u - \lfloor u \rfloor) X_{\lfloor u \rfloor + 1}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit une variable aléatoire M_n à valeurs dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ en posant, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$M_{n,t} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}.$$

Montrer en utilisant le critère de Kolmogorov que la suite des lois des variables aléatoires $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est tendue.

Exercice 3

Dans cet exercice, plutôt qu'une rédaction complète de tous les détails, je souhaite que vous donniez les réponses correctes, accompagnées d'une explication convaincante (qui peut contenir des formules et des calculs, bien entendu).

1. Soit $t > 0$ un réel et X une variable aléatoire gaussienne centrée de variance t. Montrer que la suite des lois des variables aléatoires $(\frac{1}{\sqrt{n}}X)_{n\geqslant 1}$ satisfait sur $\mathbb{R}$ un principe de grandes déviations dont on précisera la fonction de taux.

2. Soit $N \geqslant 1$ un entier. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, N\}$, on se donne une suite $(\mu_n^{(i)})_{n\geqslant 1}$ de mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{R}$ qui satisfait un principe de grandes déviations de fonction de taux I_i. Pour chaque $n \geqslant 1$, on pose $\mu_n = \mu_n^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mu_n^{(N)}$. Montrer que la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ satisfait sur $\mathbb{R}^N$ un principe de grandes déviations dont on déterminera la fonction de taux.

3. Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien standard sur $[0, 1]$. Soient $0 < t_1 < \ldots < t_N \leqslant 1$ des réels. Montrer que la suite de vecteurs aléatoires $\big(\frac{1}{\sqrt{n}}(B_{t_1}, \ldots, B_{t_N})\big)_{n\geqslant 1}$ satisfait sur $\mathbb{R}^N$ un principe de grandes déviations dont on déterminera la fonction de taux.

4. Soit $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\Big(\sup \big\{ \big| \tfrac{1}{\sqrt{n}} B_t - h(t) \big| : t \in [0, 1] \big\} \leqslant \varepsilon \Big) \leqslant -\frac{1}{2} \int_0^1 h'(t)^2 \, dt.$$

Exercice 4

On considère la percolation par arêtes dans le réseau hypercubique $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$.

1. On considère deux valeurs $0 \leqslant p < q \leqslant 1$ du paramètre. On couple les percolations de paramètre p et q de la manière usuelle, en se donnant sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ une famille de variables aléatoires $(U_e)_{e\in\mathbb{E}^d}$ i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et en posant, pour chaque arête e,

$$\omega_e^p = \mathbf{1}_{[0,p]}(U_e) \quad \text{et} \quad \omega_e^q = \mathbf{1}_{[0,q]}(U_e).$$

Soit $B = \{-1, 0, 1\}^d$ la boule de centre 0 et de rayon 1. On note ∂B son bord. Montrer que

$$\mathbf{P}(0 \stackrel{\omega^p}{\not\longleftrightarrow} \infty, 0 \stackrel{\omega^q}{\longleftrightarrow} \infty) \geqslant (q-p)^{2d} q^{2d(3^{d-1}-1)}\, \mathbf{P}(\partial B \stackrel{\omega^q}{\longleftrightarrow} \infty).$$

Que peut-on déduire d'intéressant de cette inégalité ?

2. Que pensez-vous du comportement asymptotique de $p_c(d)$ lorsque d tend vers l'infini ?