Sorbonne Université | 2023 – 2024
Probabilités approfondies – MU4MA011 | 27 octobre 2023

Partiel

L'épreuve dure deux heures.
Les trois exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
La note finale sera sur 30 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 21 points (7 fois 3)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On suppose que X est de loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire de densité donnée par la formule $e^{-x}\,\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule

$$f_n(x) = x\,\mathbf{1}_{]-\infty,n]}(x) + (n+1)\,\mathbf{1}_{]n,\infty[}(x)$$

et on pose $Y_n = f_n(X)$ ainsi que $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_n)$.

La sous-tribu $\mathscr{F}_n$ est donc définie à partir d'une seule variable aléatoire, à savoir la variable aléatoire Y_n.

1. (a) Étant donnés m et n deux entiers vérifiant $m \geqslant n \geqslant 0$, montrer que $f_n(Y_m) = Y_n$.
   (b) En déduire que $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ est une filtration.
2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, calculer $\mathbb{E}[X \mid X > n]$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{F}_n] = Y_n$ presque sûrement.
   N'hésitez pas à utiliser que l'événement $\{X > n\}$ peut également s'écrire $\{Y_n = n+1\}$.
   (c) Est-ce que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une sous-martingale ? Une martingale ? Une martingale fermée ?
3. (a) On note T la partie entière supérieure de X, c'est-à-dire la variable aléatoire définie par la formule
   $$T(\omega) = \min\{k \,:\, k \geqslant X(\omega)\}.$$
   Montrer que T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.
   (b) Montrer que la tribu $\mathscr{F}_T$ des événements antérieurs à T est égale à la tribu $\sigma(X)$.
   Démontrer l'une des deux inclusions donne une partie des points.

Exercice 2

Barème indicatif : 20 points (5 fois 4).

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On se donne un entier $n \geqslant 1$ et une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout réel $\lambda \geqslant 0$, on a $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une fonction mesurable positive $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mesurable positive, on ait l'égalité

$$\mathbf{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) q(\|x\|) \, \mathrm{d}x.$$

On définit la variable aléatoire $N = \|X\|$. Le but de l'exercice est de démontrer que les variables aléatoires N et $\frac{X}{N}$ sont indépendantes.

Considérons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mesurable positive. Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que

$$\mathbf{E}[f(X)|N] = h(N) \text{ p.s.}$$

1. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, on a $\mathbf{E}[f(\lambda X)|N] = h(\lambda N)$ p.s.
   On rappelle que pour $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$, on a $\int_{\mathbb{R}^n} u(\lambda x) \, \mathrm{d}x = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \, \mathrm{d}x$.

On suppose désormais que pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$, on a $f(\lambda x) = f(x)$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \big|h(\lambda N) - h(N)\big| \, \mathrm{d}\lambda = 0$ p.s., puis que $\displaystyle\int_0^\infty \big|h(\lambda) - h(N)\big| \, \mathrm{d}\lambda = 0$ p.s.
   On pourra admettre et utiliser le fait que $N > 0$ presque sûrement.
3. Soit $\omega_0 \in \Omega$ tel que $\displaystyle\int_0^\infty \big|h(\lambda) - h(N(\omega_0))\big| \, d\lambda = 0$. Montrer que $h(N) = h(N(\omega_0))$ presque sûrement.
4. Montrer que $\mathbf{E}[f(X)|N] = \mathbf{E}\left[f(X)\right]$ p.s.
5. Montrer que $\frac{X}{N}$ est indépendante de N.

Exercice 3

Barème indicatif : 21 points (7 fois 3).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières, et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration naturelle associée, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ pour tout $n \geqslant 0$. On suppose que $X_0 = 1$ presque sûrement, et que pour tout $n \geqslant 0$, conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, la variable X_{n+1} est uniformément distribuée sur $\{0, 1, 2, \dots, 2X_n\}$:

$$\forall n \geqslant 0, \forall k \geqslant 0, \quad \mathbf{E}\big[\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=k\}}\big|\mathcal{F}_n\big] = \frac{1}{2X_n+1}\,\mathbf{1}_{\{0\leqslant k\leqslant 2X_n\}}.$$

On notera en particulier que pour tous entiers $n \geqslant n_0 \geqslant 0$, la variable aléatoire X_n est nulle sur l'évènement $\{X_{n_0} = 0\}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Soit $M \geqslant 0$ un entier. Soit T_M le temps d'arrêt défini par $T_M = \inf\{n \geqslant 0 : X_n > M\}$.
   (a) Montrer que la martingale arrêtée $(X_{n\wedge T_M})_{n\geqslant 0}$ prend ses valeurs dans $\{0, \dots, 2M\}$. On pourra remarquer que $X_{n+1} \leqslant 2X_n$ presque sûrement et considérer les valeurs de $X_{n\wedge T_M}$ sur les deux évènements $\{n < T_M\}$ et $\{n \geqslant T_M\}$.
   (b) Montrer, pour tout $n \geqslant 0$, la majoration
   $$\mathbf{E}\big[\mathbf{1}_{\{1\leqslant X_{n+1}\leqslant M\}}\mathbf{1}_{\{1\leqslant X_n\leqslant M\}}\big|\mathcal{F}_n\big] \leqslant \left(1 - \frac{1}{2M+1}\right)\mathbf{1}_{\{1\leqslant X_n\leqslant M\}}.$$
   (c) Montrer l'inégalité
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{m=0}^{n+1}\{1 \leqslant X_m \leqslant M\}\right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{2M+1}\right)\mathbf{P}\left(\bigcap_{m=0}^{n}\{1 \leqslant X_m \leqslant M\}\right),$$
   et en déduire que l'évènement $\bigcap_{n\geqslant 0}\{1 \leqslant X_n \leqslant M\}$ est négligeable. En déduire que $(X_{n\wedge T_M})_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z_M à valeurs dans $\{0\} \cup \{M+1, \dots, 2M\}$.
   (d) Montrer que la convergence de $(X_{n\wedge T_M})_{n\geqslant 0}$ vers Z_M a également lieu dans $\mathbf{L}^1$.
3. En considérant $\mathbf{E}[Z_M]$, montrer que $\lim_{M\to\infty}\mathbf{P}(Z_M = 0) = 1$.
4. En remarquant $\{Z_M = 0\} \subset \{X_n \to 0\}$, en déduire que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 presque sûrement. A-t-on la convergence $\mathbf{L}^1$ de $(X_n)_{n\geqslant 0}$ vers 0 ?

Fin du sujet

Solution de l'exercice 1

Voici quelques éléments pour développer une intuition concernant la tribu $\mathscr{F}_n$. Cette intuition n'était pas nécessaire pour traiter cet exercice.

L'idée est que conditionner par la tribu $\mathscr{F}_n$ revient à se donner l'information suivante : je sais si on a $X > n$ ou $X \leq n$; dans le premier cas, on ne me dit rien de plus tandis que dans le second, on me révèle la valeur exacte de X. Pourquoi $\mathscr{F}_n$ encode-t-elle cette information ? Parce que, pour calculer Y_n, c'est très exactement l'information dont vous avez besoin, ni plus ni moins.

On peut chercher à rendre cette situation plus tangible. Si on imagine que X est un instant (réel) auquel notre réveil sonne, alors $\mathscr{F}_n$ encode ce qu'on sait à l'instant (entier) n : s'il a sonné, je sais à quelle heure ; sinon, la seule chose que je sais est qu'il n'a pas encore sonné. Si vous préférez une intuition visuelle, on peut imaginer que X est l'altitude d'une montagne inconnue et que, à l'instant n, les nuages sont à altitude n : alors, à l'instant n, si la montagne est plus basse que les nuages, on voit son altitude, tandis que dans le cas contraire, on sait seulement que la montagne va plus haut que les nuages.

1a. Soient m et n tels que $m \geqslant n \geqslant 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leq m$, alors on a $f_m(x) = x$ donc $f_n(f_m(x)) = f_n(x)$.
- Si $x > m$, alors on a $f_m(x) = m+1 \geqslant n+1 > n$ donc $f_n(f_m(x)) = n+1$ mais aussi $x > n$ donc $f_n(x) = n+1$. On a donc, dans ce cas également, l'égalité $f_n(f_m(x)) = f_n(x)$.

Ainsi, pour tout réel x, on a $f_n(f_m(x)) = f_n(x)$. Par conséquent, on a $f_n(f_m(X)) = f_n(X)$, c'est-à-dire $f_n(Y_m) = Y_n$.

1b. Soit $n \geqslant 0$. La fonction f_n est mesurable comme somme de produits de fonctions mesurables ($n+1$ est constante, $x \mapsto x$ est continue, X est une variable aléatoire et les intervalles sont boréliens). D'après la question précédente, la variable aléatoire Y_n s'écrit sous la forme $f_n(Y_{n+1})$ avec f_n mesurable donc Y_n est $\sigma(Y_{n+1})$-mesurable, c'est-à-dire $\mathscr{F}_{n+1}$-mesurable. Or, par définition de $\sigma(Y_n)$, $\mathscr{F}_n$ est la plus petite tribu rendant Y_n mesurable. On a donc $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$. Cela étant vrai pour n quelconque, $(\mathscr{F}_n)$ est une filtration.

2a. On a $\mathbb{E}(X \mid X > n) = \frac{\mathbb{E}(X\,\mathbf{1}_{X>n})}{\mathbb{P}(X>n)}$. Le dénominateur vaut $\mathbb{P}(X > n) = \int_n^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{-n}$. En utilisant la formule de transfert et une intégration par parties, on calcule le numérateur :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X\,\mathbf{1}_{X>n}) = \int_n^\infty x\,ex^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{L\to\infty}\left([x \times (-e^{-x})]_n^L - \int_n^L 1 \times (-e^{-x})\,\mathrm{d}x\right) \\ &= ne^{-n} + \int_n^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = (n+1)e^{-n}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{E}(X \mid X > n) = n+1$.

La loi exponentielle a une propriété assez particulière, vérifiable par le calcul : pour tout $s \geqslant 0$ et tout réel t, on a

$$\mathbb{P}(X - s \leq t \mid X > s) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Ainsi, pour tout $s \geqslant 0$, si on avait dans le cours un concept de loi conditionnelle, on pourrait dire que « la loi de $X - s$ sachant $X > s$ est une exponentielle de paramètre 1 ». Invoquant cela pour $s = n$, on aurait alors $\mathbb{E}(X - n \mid X > n) = \mathbb{E}(X)$. On retrouverait alors le résultat de 2a en remarquant que $\mathbb{E}(X - n \mid X > n) = \mathbb{E}(X \mid X > n) - n$ et que $\mathbb{E}(X) = 1$.

2b. Remarquons que $X = Y_n + (X-n-1)\,\mathbf{1}_{X>n} = Y_n + (X-n-1)\,\mathbf{1}_{Y_n=n+1}$. Toutes les variables aléatoires considérés sont intégrables puisque la variable aléatoire X est de loi exponentielle donc est intégrable. On peut donc écrire

$$\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(Y_n \mid \mathscr{F}_n) + \mathbb{E}((X-n-1)\mathbf{1}_{Y_n=n+1} \mid \mathscr{F}_n) = Y_n + \mathbf{1}_{Y_n=n+1}\,\mathbb{E}(X-n-1 \mid \mathscr{F}_n),$$

par linéarité de l'espérance conditionnelle puis parce que Y_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable (puisque $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_n)$). Or, sur l'événement $\{Y_n = n+1\}$, la variable aléatoire $\mathbb{E}(X - n - 1 \,|\, \mathscr{F}_n)$ vaut $\mathbb{E}(X - n - 1 \,|\, Y_n = n+1) = \mathbb{E}(X \,|\, X > n) - n - 1$, qui est nul d'après la question précédente. D'où le résultat.

Si on veut être formel, la variable aléatoire $\mathbb{E}(X - n - 1 \,|\, \mathscr{F}_n)$ est $\sigma(Y_n)$-mesurable donc de la forme $g_n(Y_n)$, si bien qu'elle doit prendre une unique valeur $g_n(n+1)$ sur l'événement $\{Y_n = n+1\}$. On détermine alors cette valeur en utilisant que, pour l'événement $A = \{Y_n = n+1\} \in \mathscr{F}_n$, on doit avoir $\mathbb{E}(\mathbb{E}((X-n-1) \,|\, \mathscr{F}_n)\, \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}((X-n-1)\, \mathbf{1}_A)$.

2c. D'après la question précédente, (Y_n) est une martingale fermée. C'est donc une martingale et en particulier aussi une sous-martingale.

3a. Pour tout $n \geqslant 0$, on a $\{T \leq n\} = \{X \leq n\} = \{Y_n \neq n+1\} \in \mathscr{F}_n$ donc T est un temps d'arrêt.

3b. Chaque variable aléatoire Y_n s'écrit $f_n(X)$ avec f_n mesurable donc chaque Y_n est $\sigma(X)$-mesurable. Donc, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\mathscr{F}_n \subset \sigma(X)$. On a donc aussi $\mathscr{F}_\infty \subset \sigma(X)$. En particulier, on a $\mathscr{F}_T \subset \sigma(X)$.

Soit t un réel. Il s'agit de montrer que $\{X \leq t\} \in \mathscr{F}_T$. Pour ce faire, on remarque que $X = Y_T$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\{X \leq t\} \cap \{T = n\} = \{Y_n \leq t\} \in \mathscr{F}_n$. Enfin, l'événement $\{X \leq t\}$ appartient bien à $\mathscr{F}_\infty$ car on peut l'écrire sous la forme $\bigcup_{0 \leq n < \infty} \{X \leq t\} \cap \{T = n\}$, où chaque $\{X \leq t\} \cap \{T = n\}$ est dans $\mathscr{F}_n$ donc dans $\mathscr{F}_\infty$. D'où l'inclusion $\sigma(X) \subset \mathscr{F}_T$.

Solution de l'exercice 2

1. On utilise la méthode de la fonction muette. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. On a

$$\mathbf{E}[f(\lambda X) g(N)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) g(\|x\|) q(\|x\|)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) g(\tfrac{1}{\lambda}\|\lambda x\|) q(\tfrac{1}{\lambda}\|\lambda x\|)\, \mathrm{d}x$$

qui, d'après le changement de variable rappelé en indication, vaut

$$\begin{aligned} \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(\tfrac{1}{\lambda}\|x\|) q(\tfrac{1}{\lambda}\|x\|)\, \mathrm{d}x &= \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{g(\frac{1}{\lambda}\|x\|) q(\frac{1}{\lambda}\|x\|)}{q(\|x\|)}\, q(\|x\|)\, \mathrm{d}x \\ &= \lambda^{-n}\, \mathbf{E}\Big[f(X) \frac{g(\frac{1}{\lambda}N) q(\frac{1}{\lambda}N)}{q(N)}\Big]. \end{aligned}$$

On calcule cette espérance en conditionnant sachant $\sigma(N)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big[f(X) \frac{g(\frac{1}{\lambda}N) q(\frac{1}{\lambda}N)}{q(N)}\Big] = \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\Big[f(X) \frac{g(\frac{1}{\lambda}N) q(\frac{1}{\lambda}N)}{q(N)} \Big| N\Big]\Big] &= \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\big[f(X) \big| N\big] \frac{g(\frac{1}{\lambda}N) q(\frac{1}{\lambda}N)}{q(N)}\Big] \\ &= \mathbf{E}\Big[h(N) \frac{g(\frac{1}{\lambda}N) q(\frac{1}{\lambda}N)}{q(N)}\Big]. \end{aligned}$$

En reprenant notre calcul, on trouve donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f(\lambda X) g(N)] &= \lambda^{-n} \mathbf{E}\Big[h(N) \frac{g(\frac{1}{\lambda}N) q(\frac{1}{\lambda}N)}{q(N)}\Big] \\ &= \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} h(\|x\|) g(\tfrac{1}{\lambda}\|x\|) q(\tfrac{1}{\lambda}\|x\|)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

et en faisant à nouveau le changement de variables, mais cette fois dans l'autre sens, on trouve

$$\mathbf{E}[f(\lambda X)g(N)] = \int_{\mathbb{R}^n} h(\|\lambda x\|)g(\|x\|)q(\|x\|)\,\mathrm{d}x = \mathbf{E}[h(\lambda N)g(N)].$$

On en déduit que $h(\lambda N)$ est l'espérance conditionnelle de $f(\lambda X)$ sachant N.

2. L'hypothèse entraîne que $f(\lambda X) = f(X)$ presque sûrement donc, en prenant l'espérance conditionnelle sachant N, que $h(\lambda N) = h(N)$ presque sûrement. Ceci a lieu pour tout $\lambda > 0$. On a donc, pour tout $\lambda > 0$, l'égalité $\mathbf{E}\big[|h(\lambda N) - h(N)|\big] = 0$, si bien que

$$0 = \int_0^{+\infty} \mathbf{E}\big[|h(\lambda N) - h(N)|\big]\,\mathrm{d}\lambda.$$

Grâce au théorème de Fubini, ceci devient

$$0 = \mathbf{E}\left[\int_0^{+\infty} |h(\lambda N) - h(N)|\,\mathrm{d}\lambda\right]$$

et de cette égalité on déduit que la variable aléatoire positive

$$\int_0^{+\infty} |h(\lambda N) - h(N)|\,\mathrm{d}\lambda,$$

dont l'espérance est nulle, est nulle presque sûrement.

Soit maintenant $\omega \in \Omega$ tel que l'intégrale ci-dessus soit nulle et $N(\omega) > 0$. En faisant le changement de variable $\lambda' = \lambda N(\omega)$, on trouve

$$0 = \int_0^{+\infty} |h(\lambda N(\omega)) - h(N(\omega))|\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{N(\omega)}\int_0^{+\infty} |h(\lambda') - h(N(\omega))|\,\mathrm{d}\lambda',$$

si bien que

$$\int_0^{+\infty} |h(\lambda) - h(N(\omega))|\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

Cette égalité a donc lieu presque sûrement.

3. Fixons $\omega_0 \in \Omega$ tel que $\displaystyle\int_0^{\infty} \big|h(\lambda) - h(N(\omega_0))\big|\,d\lambda = 0$ et utilisons l'inégalité triangulaire pour borner l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \big|h(N) - h(N(\omega_0))\big|\,d\lambda \leqslant \int_0^{\infty} \big|h(N) - h(\lambda)\big|\,d\lambda + \int_0^{\infty} \big|h(\lambda) - h(N(\omega_0))\big|\,d\lambda.$$

Comme $\int_0^{\infty} \big|h(N) - h(\lambda)\big|\,d\lambda = 0$ presque sûrement et $\displaystyle\int_0^{\infty} \big|h(\lambda) - h(N(\omega_0))\big|\,d\lambda = 0$, on a que

$$\int_0^{\infty} \big|h(N) - h(N(\omega_0))\big|\,d\lambda = 0 \text{ presque sûrement.}$$

Or, comme la fonction à intégrer ne dépend pas de λ,

$$\int_0^{\infty} \big|h(N) - h(N(\omega_0))\big|\,d\lambda = \infty \times \big|h(N) - h(N(\omega_0))\big|,$$

d'où on conclut que $h(N) = h(N(\omega_0))$ presque sûrement.

4. Comme $h(N) = h(N(\omega_0))$ presque sûrement, $\mathbf{E}[h(N)] = \mathbf{E}[h(N(\omega_0))] = h(N(\omega_0))$. Ceci implique que $h(N) = \mathbf{E}[h(N)]$ presque sûrement et l'espérance de $h(N)$ peut s'obtenir par le calcul $\mathbf{E}[h(N)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[f(X)|N]] = \mathbf{E}[f(X)]$. Alors, presque sûrement,

$$\mathbf{E}[f(X)|N] = h(N) = \mathbf{E}[f(X)].$$

5. Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ donnée par $f(x) = 1_A(x/\|x\|)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est mesurable et satisfait que $f(\lambda x) = f(x)$ pour tout $\lambda > 0$. On a que

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X}{N} \in A \text{ et } N \in B\Big) = \mathbf{E}\Big[1_A\Big(\frac{X}{N}\Big)1_B(N)\Big] = \mathbf{E}[f(X)1_B(N)].$$

En remarquant que $\mathbf{E}[f(X)1_B(N)|N] = \mathbf{E}[f(X)|N]1_B(N) = \mathbf{E}[f(X)]1_B(N)$ on obtient

$$\mathbf{E}[f(X)1_B(N)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[f(X)1_B(N)|N]] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[f(X)]1_B(N)] = \mathbf{E}[f(X)]\mathbf{E}[1_B(N)].$$

Comme $\mathbf{E}[f(X)] = \mathbb{P}(\frac{X}{N} \in A)$ on trouve

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X}{N} \in A \text{ et } N \in B\Big) = \mathbf{P}\Big(\frac{X}{N} \in A\Big)\mathbf{P}(N \in B).$$

Ceci étant valable pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, les variables $\frac{X}{N}$ et N sont indépendantes.

Solution de l'exercice 3

1. Le fait que X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable est évident par définition de la tribu $\mathcal{F}_n$. Une récurrence permet de montrer que pour tout n, on a $0 \leqslant X_n \leqslant 2^n$, donc la variable aléatoire X_n est bornée, et donc intégrable. Enfin, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{1}_{X_{n+1}=k}|\mathcal{F}_n\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{E}(\mathbf{1}_{X_{n+1}=k}|\mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{1}{2X_n+1}\mathbf{1}_{0\leqslant k\leqslant 2X_n} \\
&= \frac{1}{2X_n+1} \times \frac{(2X_n+1)2X_n}{2} \\
&= X_n
\end{aligned}$$

(la deuxième égalité découle du théorème de convergence monotone, ou du théorème de Fubini positif). La suite (X_n) est donc bien une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

2. (a) Par définition de X_n, on a presque sûrement $X_{n+1} \leqslant 2X_n$. Par ailleurs, sur $\{n < T_M\}$, on a par définition $X_{n\wedge T_M} = X_n \leqslant M$, et sur $\{n \geqslant T_M\}$, on a $X_{n\wedge T_M} = X_{T_M} \leqslant 2X_{T_M-1} \leqslant 2M$.

(b) On écrit

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{1}_{1\leqslant X_{n+1}\leqslant M}\mathbf{1}_{1\leqslant X_n\leqslant M}|\mathcal{F}_n) &= \mathbf{1}_{1\leqslant X_n\leqslant M}\sum_{k=1}^{M}\mathbf{E}(\mathbf{1}_{X_{n+1}=k}|\mathcal{F}_n)\\
&= \mathbf{1}_{1\leqslant X_n\leqslant M}\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{2X_n+1}\mathbf{1}_{k\leqslant 2X_n}\\
&\leqslant \mathbf{1}_{1\leqslant X_n\leqslant M}\frac{2X_n}{2X_n+1}\\
&= \mathbf{1}_{1\leqslant X_n\leqslant M}\left(1-\frac{1}{2X_n+1}\right)\\
&\leqslant \mathbf{1}_{1\leqslant X_n\leqslant M}\left(1-\frac{1}{2M+1}\right).
\end{aligned}$$

(c) Par la propriété des espérances conditionnelles emboîtées, puis la question 2b, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcap_{m=0}^{n+1}\{1\leqslant X_m\leqslant M\}\right) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\bigcap_{m=0}^{n+1}\{1\leqslant X_m\leqslant M\}}|\mathcal{F}_n))\\
&= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\bigcap_{m=0}^{n-1}\{1\leqslant X_m\leqslant M\}}\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{1\leqslant X_{n+1}\leqslant M\}}\mathbf{1}_{\{1\leqslant X_n\leqslant M\}}|\mathcal{F}_n))\\
&\leqslant \left(1-\frac{1}{2M+1}\right)\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\bigcap_{m=0}^{n}\{1\leqslant X_m\leqslant M\}})\\
&= \left(1-\frac{1}{2M+1}\right)\mathbf{P}\left(\bigcap_{m=0}^{n}\{1\leqslant X_m\leqslant M\}\right).
\end{aligned}$$

On a donc, par récurrence

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{m=0}^{n}\{1\leqslant X_m\leqslant M\}\right)\leqslant\left(1-\frac{1}{2M+1}\right)^n$$

et en passant à la limite $n\to\infty$, l'évènement $\bigcap_{n\geqslant 0}\{1\leqslant X_n\leqslant M\}$ est négligeable. Par conséquent, X_n va presque sûrement sortir de l'ensemble $\{1,\ldots,M\}$. La suite $(X_{n\wedge T_M})$ restant stationnaire dès qu'elle a quitté $\{1,\ldots,M\}$, elle converge donc presque sûrement vers une variable à valeurs dans $\{0,\ldots,2M\}\setminus\{1,\ldots,M\}$.

(d) C'est une conséquence du théorème de convergence dominée (on a démontré la convergence presque sûre en question 2c et on peut dominer $X_{n\wedge T_M}$ par la constante $2M$ d'après la question 2a).

3. Comme la martingale arrêtée est une martingale, on a, pour tout n, $\mathbf{E}(X_{n\wedge T_M})=\mathbf{E}(X_0)=1$. Par convergence $\mathbf{L}^1$, on a donc $\mathbf{E}(Z_M)=1$. Enfin, comme Z_M prend ses valeurs dans $\{0\}\cup\{M+1,\ldots,2M\}$, on a

$$\mathbf{P}(Z_M=0)=1-\mathbf{P}(Z_M>M)\geqslant 1-\frac{\mathbf{E}(Z_M)}{M}=1-\frac{1}{M},$$

où on a utilisé l'inégalité de Markov. En faisant tendre M vers l'infini, on obtient bien $\lim_M \mathbf{P}(Z_M=0)=1$.

4. On a
$$\{Z_M = 0\} = \{X_{n\wedge T_M} \to 0\} = \{X_n \to 0\} \cap \{T_M = \infty\} \subset \{X_n \to 0\}.$$
En utilisant la question précédente, on a donc
$$\mathbf{P}(X_n \to 0) \geqslant \lim_M \mathbf{P}(Z_M \to 0) = 1$$

5. Si on avait la convergence $\mathbf{L}^1$ de $(X_n)_{n\geqslant 0}$ vers 0, on aurait $\mathbf{E}(X_n) \to 0$, or puisque $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale, on a $\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X_0) = 1$ pour tout n. On n'a donc pas de convergence $\mathbf{L}^1$.