Sorbonne Université — 2023 – 2024
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 27 octobre 2023

Partiel

L'épreuve dure deux heures.
Les trois exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
La note finale sera sur 30 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 21 points (7 fois 3)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On suppose que X est de loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire de densité donnée par la formule $e^{-x}\,\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule

$$f_n(x) = x\,\mathbf{1}_{]-\infty,n]}(x) + (n+1)\,\mathbf{1}_{]n,\infty[}(x)$$

et on pose $Y_n = f_n(X)$ ainsi que $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_n)$.

La sous-tribu $\mathscr{F}_n$ est donc définie à partir d'une seule variable aléatoire, à savoir la variable aléatoire Y_n.

1. (a) Étant donnés m et n deux entiers vérifiant $m \geqslant n \geqslant 0$, montrer que $f_n(Y_m) = Y_n$.
   (b) En déduire que $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ est une filtration.
2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, calculer $\mathbb{E}[X \mid X > n]$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{F}_n] = Y_n$ presque sûrement.
   N'hésitez pas à utiliser que l'événement $\{X > n\}$ peut également s'écrire $\{Y_n = n+1\}$.
   (c) Est-ce que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une sous-martingale ? Une martingale ? Une martingale fermée ?
3. (a) On note T la partie entière supérieure de X, c'est-à-dire la variable aléatoire définie par la formule
   $$T(\omega) = \min\{k \,:\, k \geqslant X(\omega)\}.$$
   Montrer que T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.
   (b) Montrer que la tribu $\mathscr{F}_T$ des événements antérieurs à T est égale à la tribu $\sigma(X)$.
   Démontrer l'une des deux inclusions donne une partie des points.

Exercice 2

Barème indicatif : 20 points (5 fois 4).

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On se donne un entier $n \geqslant 1$ et une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout réel $\lambda \geqslant 0$, on a $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une fonction mesurable positive $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mesurable positive, on ait l'égalité

$$\mathbf{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) q(\|x\|)\, \mathrm{d}x.$$

On définit la variable aléatoire $N = \|X\|$. Le but de l'exercice est de démontrer que les variables aléatoires N et $\frac{X}{N}$ sont indépendantes.

Considérons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mesurable positive. Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que

$$\mathbf{E}[f(X)|N] = h(N) \text{ p.s.}$$

1. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, on a $\mathbf{E}[f(\lambda X)|N] = h(\lambda N)$ p.s.
   On rappelle que pour $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$, on a $\int_{\mathbb{R}^n} u(\lambda x)\, \mathrm{d}x = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \mathrm{d}x$.

On suppose désormais que pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$, on a $f(\lambda x) = f(x)$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \big|h(\lambda N) - h(N)\big|\, \mathrm{d}\lambda = 0$ p.s., puis que $\displaystyle\int_0^\infty \big|h(\lambda) - h(N)\big|\, \mathrm{d}\lambda = 0$ p.s.
   On pourra admettre et utiliser le fait que $N > 0$ presque sûrement.
3. Soit $\omega_0 \in \Omega$ tel que $\displaystyle\int_0^\infty \big|h(\lambda) - h(N(\omega_0))\big|\, d\lambda = 0$. Montrer que $h(N) = h(N(\omega_0))$ presque sûrement.
4. Montrer que $\mathbf{E}[f(X)|N] = \mathbf{E}\,[f(X)]$ p.s.
5. Montrer que $\frac{X}{N}$ est indépendante de N.

Exercice 3

Barème indicatif : 21 points (7 fois 3).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières, et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration naturelle associée, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ pour tout $n \geqslant 0$. On suppose que $X_0 = 1$ presque sûrement, et que pour tout $n \geqslant 0$, conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, la variable X_{n+1} est uniformément distribuée sur $\{0, 1, 2, \ldots, 2X_n\}$:

$$\forall n \geqslant 0, \forall k \geqslant 0, \quad \mathbf{E}\big[\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=k\}}\big|\mathcal{F}_n\big] = \frac{1}{2X_n+1}\,\mathbf{1}_{\{0\leqslant k\leqslant 2X_n\}}.$$

On notera en particulier que pour tous entiers $n \geqslant n_0 \geqslant 0$, la variable aléatoire X_n est nulle sur l'évènement $\{X_{n_0} = 0\}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Soit $M \geqslant 0$ un entier. Soit T_M le temps d'arrêt défini par $T_M = \inf\{n \geqslant 0 : X_n > M\}$.
   (a) Montrer que la martingale arrêtée $(X_{n\wedge T_M})_{n\geqslant 0}$ prend ses valeurs dans $\{0, \ldots, 2M\}$. On pourra remarquer que $X_{n+1} \leqslant 2X_n$ presque sûrement et considérer les valeurs de $X_{n\wedge T_M}$ sur les deux évènements $\{n < T_M\}$ et $\{n \geqslant T_M\}$.
   (b) Montrer, pour tout $n \geqslant 0$, la majoration
   $$\mathbf{E}\big[\mathbf{1}_{\{1\leqslant X_{n+1}\leqslant M\}}\mathbf{1}_{\{1\leqslant X_n\leqslant M\}}\big|\mathcal{F}_n\big] \leqslant \left(1 - \frac{1}{2M+1}\right)\mathbf{1}_{\{1\leqslant X_n\leqslant M\}}.$$
   (c) Montrer l'inégalité
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{m=0}^{n+1}\{1 \leqslant X_m \leqslant M\}\right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{2M+1}\right)\mathbf{P}\left(\bigcap_{m=0}^{n}\{1 \leqslant X_m \leqslant M\}\right),$$
   et en déduire que l'évènement $\bigcap_{n\geqslant 0}\{1 \leqslant X_n \leqslant M\}$ est négligeable. En déduire que $(X_{n\wedge T_M})_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z_M à valeurs dans $\{0\} \cup \{M+1, \ldots, 2M\}$.
   (d) Montrer que la convergence de $(X_{n\wedge T_M})_{n\geqslant 0}$ vers Z_M a également lieu dans $\mathbf{L}^1$.
3. En considérant $\mathbf{E}[Z_M]$, montrer que $\lim_{M\to\infty}\mathbf{P}(Z_M = 0) = 1$.
4. En remarquant $\{Z_M = 0\} \subset \{X_n \to 0\}$, en déduire que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 presque sûrement. A-t-on la convergence $\mathbf{L}^1$ de $(X_n)_{n\geqslant 0}$ vers 0 ?

Fin du sujet