

Examen – Deuxième session

L'examen dure trois heures.

Les quatre exercices sont indépendants.

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.

Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3).

Les cinq questions sont indépendantes.

1. On munit l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de la tribu de toutes ses parties $\mathcal{B}$ et de la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on définit la variable aléatoire X en posant $X(i) = i$ pour tout $i \in \Omega$. On définit la sous-tribu $\mathcal{C} = \sigma(\{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 6\}\})$ de $\mathcal{B}$.

Déterminer le cardinal de $\mathcal{C}$ et calculer la variable aléatoire $\mathbb{E}[X|\mathcal{C}]$.

2. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne un vecteur gaussien (X, Y) centré tel que $\text{Var}(X) = 1$, $\text{Var}(Y) = 2$ et $\text{Cov}(X, Y) = -1$.

Calculer $\mathbb{E}[X|X - Y]$.

3. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles dont la loi admet, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, la densité f donnée par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) = c \mathbf{1}_{[0,1]}(x^2 + y^2).$$

Déterminer la constante c et calculer $\mathbb{E}[|Y||X]$.

4. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne deux variables aléatoires X et Y indépendantes. On suppose que X est intégrable et que sa loi admet par rapport à la mesure de Lebesgue une densité strictement positive, notée f . On suppose de plus que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Calculer $\mathbb{E}[X|X + Y]$.

5. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne quatre variables aléatoires intégrables X, Y, U, V . On suppose que le couple (X, Y) a même loi que le couple (U, V) .

Peut-on affirmer que $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[U|V]$ ont même loi? (On donnera une démonstration ou un contre-exemple.)

Solution de l'exercice 1

1. La tribu $\mathcal{C}$ contient les parties $A = \{1, 3\}$, $B = \{2\}$, $C = \{4, 6\}$ et $D = \{5\}$ qui forment une partition de Ω . Elle contient donc la tribu engendrée par cette partition. Ceci s'écrit $\mathcal{C} \supseteq \sigma(\{A, B, C, D\})$. Par ailleurs, puisque $\{1, 2, 3\} = A \cup B$ et $\{2, 4, 6\} = B \cup C$, l'inclusion inverse a aussi lieu, si bien que $\mathcal{C} = \sigma(\{A, B, C, D\})$.

La tribu $\mathcal{C}$ a donc $2^4 = 16$ éléments.

Dans ce cas, où la sous-tribu par rapport à laquelle on conditionne est engendrée par une partition finie, on a une expression explicite de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{C}] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_A]}{\mathbb{P}(A)}\mathbf{1}_A + \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}\mathbf{1}_B + \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_C]}{\mathbb{P}(C)}\mathbf{1}_C + \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_D]}{\mathbb{P}(D)}\mathbf{1}_D.$$

On en déduit les valeurs suivantes pour $\mathbb{E}[X|\mathcal{C}]$:

i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{E}[X \mathcal{C}](i)$	2	2	2	5	5	5

2. Posons $Z = X - Y$. Le vecteur aléatoire (X, Z) , qui est l'image de (X, Y) par la transformation linéaire $(u, v) \mapsto (u, u - v)$, est encore un vecteur gaussien centré. Cherchons un réel a tel que $\text{Cov}(X + aZ, Z) = 0$. Cette relation équivaut à

$$0 = \text{Cov}(X, Z) + a\text{Var}(Z) = 2 + 5a,$$

c'est-à-dire à $a = -\frac{2}{5}$. Puisque $(X - \frac{2}{5}Z, Z)$ est encore un vecteur gaussien centré, la relation $\text{Cov}(X - \frac{2}{5}Z, Z) = 0$ entraîne que $X - \frac{2}{5}Z$ et Z sont indépendantes. Cette indépendance entraîne

$$\mathbb{E}[X - \frac{2}{5}Z|Z] = \mathbb{E}[X - \frac{2}{5}Z] = 0 \text{ p.s.}$$

Mais on a par ailleurs

$$\mathbb{E}[X - \frac{2}{5}Z|Z] = \mathbb{E}[X|Z] - \frac{2}{5}\mathbb{E}[Z|Z] = \mathbb{E}[X|Z] - \frac{2}{5}Z \text{ p.s.}$$

En comparant ces deux relations, et en se rappelant que $Z = X - Y$, on trouve

$$\mathbb{E}[X|X - Y] = \frac{2}{5}(X - Y).$$

3. La constante c est déterminée par le fait que l'intégrale de la densité f sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue vaut 1. Le domaine sur lequel la fonction f prend des valeurs non nulles est le disque unité, et la fonction f y est constante, égale à c . On a donc $c = \frac{1}{\pi}$.

Pour toute fonction mesurable bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx.$$

Cette expression décrit la loi de X et nous pouvons maintenant calculer $\mathbb{E}[|Y||X]$ en utilisant la méthode de la fonction muette. Soit donc $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Calculons $\mathbb{E}[|Y|g(X)]$. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y|g(X)] &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g(x) \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |y| dy \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 g(x) (1-x^2) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 g(x) \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-X^2}g(X)\right]. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\mathbb{E}[|Y||X] = \frac{1}{2}\sqrt{1-X^2}.$$

4. La loi de $X + Y$ admet la densité

$$h(t) = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} f(x) \, dx.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Xg(X+Y)] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left(\int_{t-1}^{t+1} sf(s) \, ds \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{\int_{t-1}^{t+1} sf(s) \, ds}{\int_{t-1}^{t+1} f(s) \, ds} h(t) \, dt \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\int_{X+Y-1}^{X+Y+1} sf(s) \, ds}{\int_{X+Y-1}^{X+Y+1} f(s) \, ds} g(X+Y) \right]. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[X|X+Y] = \frac{\int_{X+Y-1}^{X+Y+1} sf(s) \, ds}{\int_{X+Y-1}^{X+Y+1} f(s) \, ds}.$$

Exercice 2

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite $(X_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On pose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Enfin, on se donne un temps d'arrêt T pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

On suppose les $(X_k)_{k \geq 1}$ intégrables et $T < +\infty$ presque sûrement. On note $a = \mathbb{E}[X_1]$.

1. Montrer que $(S_n - na)_{n \geq 0}$ est une martingale. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, on a l'égalité $\mathbb{E}[S_{n \wedge T}] = a\mathbb{E}[n \wedge T]$.

2. On suppose dans cette question que les $(X_k)_{k \geq 1}$ sont positives. Montrer que $\mathbb{E}[S_T] = a\mathbb{E}[T]$.

3. On ne suppose plus les $(X_k)_{k \geq 1}$ positives, mais on suppose que $\mathbb{E}[T] < +\infty$. Montrer que la variable aléatoire $W = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_T|$ est intégrable. En déduire que S_T est intégrable et que $\mathbb{E}[S_T] = a\mathbb{E}[T]$.

On suppose désormais les $(X_k)_{k \geq 1}$ de carré intégrable et tels que $\mathbb{E}[X_1] = 0$. On suppose de plus que $\mathbb{E}[T] < +\infty$. On note $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1)^2]$.

4. Montrer que $(S_n^2 - n\sigma^2)_{n \geq 0}$ est une martingale. En déduire que $\mathbb{E}[(S_{n \wedge T})^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[n \wedge T]$ pour tout $n \geq 0$.

5. Montrer que $(S_{n \wedge T})_{n \geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2 et en déduire $\mathbb{E}[(S_T)^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[T]$.

Solution de l'exercice 2

1. Pour tout $n \geq 0$, la variable aléatoire $S_n - na$ est intégrable, et la suite $(S_n - na)_{n \geq 0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Fixons $n \geq 0$. On a

$$\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n + a.$$

En soustrayant $(n+1)a$ des deux côtés, on trouve l'égalité qui montre que $(S_n - na)_{n \geq 0}$ est une martingale.

En appliquant le théorème d'arrêt au temps d'arrêt borné $T \wedge n$, on trouve

$$\mathbb{E}[S_{n \wedge T} - (n \wedge T)a] = \mathbb{E}[S_0 - 0a] = 0.$$

La variable aléatoire $n \wedge T$ est bornée par n donc intégrable. On a donc

$$\mathbb{E}[S_{n \wedge T}] = \mathbb{E}[S_{n \wedge T} - (n \wedge T)a + (n \wedge T)a] = a\mathbb{E}[n \wedge T].$$

2. Si les X_k sont positifs, la suite $(S_{n \wedge T})_{n \geq 0}$ est une suite croissante de variables aléatoires positives, qui est presque sûrement stationnaire et convergente vers S_T . Le théorème de convergence monotone nous donne donc

$$\mathbb{E}[S_T] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_{T \wedge n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} a\mathbb{E}[T \wedge n]$$

et une nouvelle application du théorème de convergence monotone montre que cette dernière limite vaut $a\mathbb{E}[T]$.

3. La question précédente appliquée aux $|X_k|$ nous donne

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[|X_1|] \mathbb{E}[T].$$

Ainsi, W est intégrable.

La convergence de $S_{n \wedge T}$ vers S_T est dominée par W , donc le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que S_T est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_{n \wedge T}] = \mathbb{E}[S_T].$$

Par ailleurs, le théorème de convergence monotone nous donne toujours

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[n \wedge T] = \mathbb{E}[T],$$

et l'égalité est démontrée.

4. On a maintenant

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n] = S_n^2 + \mathbb{E}[X_{n+1}^2] + 2S_n \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n^2 + \sigma^2.$$

Le reste de la question se traite comme la question 1.

5. On a $\mathbb{E}[S_{n \wedge T}^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[n \wedge T] \leq \sigma^2 \mathbb{E}[T]$, ce qui montre que la martingale $(S_{n \wedge T})_{n \geq 0}$ est bornée dans L^2 . Elle converge donc dans L^2 , et comme elle converge presque sûrement vers S_T , nous avons

$$\mathbb{E}[S_T^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_{n \wedge T}^2] = \sigma^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[n \wedge T] = \sigma^2 \mathbb{E}[T].$$

Exercice 3

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3).

Soit E un espace d'états et P un noyau de transition markovien sur E . Soit π une mesure de probabilité sur E . On suppose que π est invariante pour P et que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$.

1. Les hypothèses permettent-elles d'affirmer quelque chose sur l'irréductibilité de P , sur la récurrence ou la transience des états de E , et sur l'unicité d'une mesure de probabilité invariante pour P ?

Soit $Q : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$Q(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x).$$

2. Montrer que Q est un noyau de transition sur E et que π est une mesure de probabilité invariante pour Q .

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E}, X = (X_n)_{n \geq 0})$ une chaîne de Markov sur E de noyau de transition P . Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Pour tout entier n compris entre 0 et N , on pose

$$Y_n = X_{N-n}.$$

3. Calculer $\mathbb{P}_\pi(Y_0 = x_0, \dots, Y_N = x_N)$ pour tous $x_0, \dots, x_N \in E$. En déduire que, sous $\mathbb{P}_\pi$, $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une chaîne de Markov dont on précisera le noyau de transition.

Soit $p \in]0, 1[$ un réel. On considère le cas où $E = \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{N}$,

$$P(x, y) = p \mathbf{1}_{\{y=x+1\}} + (1-p) \mathbf{1}_{\{y=0\}}.$$

4. Déterminer une mesure de probabilité invariante pour P , et déterminer si elle est unique.

5. Calculer le noyau de transition Q et dessiner des trajectoires typiques de X et Y dans ce cas.

Solution de l'exercice 3

1. L'exemple où E est un ensemble fini non réduit à un point, P le noyau unité, et π la mesure de probabilité uniforme sur E montre que P n'est pas nécessairement irréductible, ni π unique : dans ce cas, toute autre mesure de probabilité qui donne une masse strictement positive à chaque point de E convient.

Mais on peut tout de même affirmer, en général, que tous les éléments de E sont récurrents. En effet, la démonstration du résultat du cours qui affirme que si une chaîne irréductible admet une

probabilité invariante, elle est récurrente, montre en fait que si une chaîne admet une probabilité invariante, alors tout élément auquel cette probabilité donne une masse strictement positive est récurrent. Rappelons l'argument : si $\pi(x) > 0$, alors

$$\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(x) = \sum_{y \in E} \sum_{n=0}^{\infty} \pi(y) P^n(y, x) = \sum_{y \in E} \pi(y) G(y, x) \leq \sum_{y \in E} \pi(y) G(x, x) = G(x, x).$$

2. Soit x un élément de E . On a

$$\sum_{y \in E} Q(x, y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in E} \pi(y) P(y, x) = 1.$$

La fonction Q est donc bien un noyau de transition.

De plus,

$$\sum_{y \in E} \pi(y) Q(y, x) = \sum_{y \in E} \pi(x) P(x, y) = \pi(x),$$

donc π est invariante pour Q .

3. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\pi}(Y_0 = x_0, \dots, Y_N = x_N) &= \mathbb{P}_{\pi}(X_0 = x_N, \dots, X_N = x_0) \\ &= \pi(x_N) P(x_N, x_{N-1}) \dots P(x_1, x_0) \\ &= \frac{\pi(x_N)}{\pi(x_{N-1})} P(x_N, x_{N-1}) \dots \frac{\pi(x_1)}{\pi(x_0)} P(x_1, x_0) \pi(x_0) \\ &= \pi(x_0) Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{N-1}, x_N). \end{aligned}$$

Ainsi, $(Y_0, \dots, Y_N)$ a la loi des N premiers par d'une chaîne de Markov sur E de loi initiale π et de noyau de transition Q .

4. Le noyau P est irréductible sur $\mathbb{N}$, puisque tout état mène à 0 et 0 mène à tout état. Une mesure invariante donne donc une masse strictement positive à tout état. Cherchons une mesure invariante μ telle que $\mu(0) = 1$. Alors $\mu(1) = \mu(0)P(0, 1) = p$, $\mu(2) = \mu(1)P(1, 2) = p^2$ et ainsi de suite. Pour vérifier que la mesure μ donnée par $\mu(i) = p^i$ est bien invariante, il faut encore vérifier que

$$\mu(0) = \sum_{i \geq 0} \mu(i) P(i, 0)$$

, ce qui est vrai car

$$1 = (1 - p) \sum_{i \geq 0} p^i.$$

Ainsi, μ est invariante. Elle est de masse finie, et se normalise en une probabilité invariante

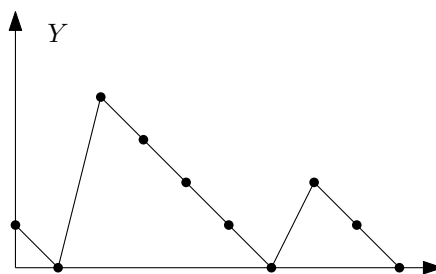
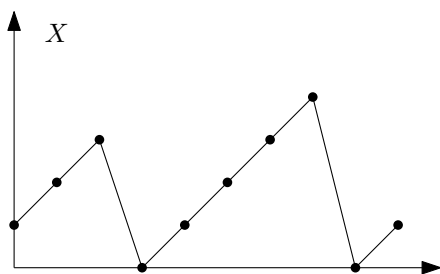
$$\pi(i) = (1 - p)p^i.$$

Puisqu'elle est irréductible et admet une probabilité invariante, la chaîne est irréductible récurrente positive, et admet une unique probabilité invariante.

On a donc

$$Q(x, y) = p^{y-x+1} \mathbf{1}_{\{y=x-1\}} + (1 - p)p^{y-x} \mathbf{1}_{\{x=0\}} = \mathbf{1}_{\{y=x-1\}} + \pi(y) \mathbf{1}_{\{x=0\}}.$$

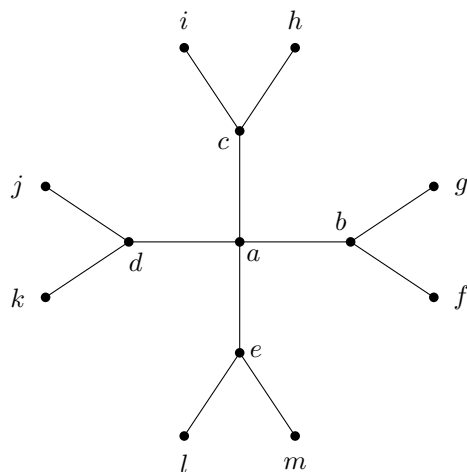
Des trajectoires possibles de X et Y sont représentées ci-dessous.



Exercice 4

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On étudie la marche aléatoire sur le graphe représenté ci-dessous.



1. Déterminer la masse de chacun des états a , b et f pour l'unique mesure de probabilité invariante pour cette marche aléatoire.
2. Partant de d , combien de temps la marche aléatoire met-elle, en moyenne, à revenir en d ?
3. Partant de c , combien de fois la marche visite-t-elle, en moyenne, le sommet a avant de revenir pour la première fois à son point de départ?
4. Notons $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire. On note $M = \{b, c, d, e\}$. La quantité

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_M(X_i)$$

admet-elle sous $\mathbb{P}_a$ une limite presque sûre lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle?

5. Est-il vrai que pour toute fonction f à valeurs réelles sur l'ensemble des sommets de notre graphe, la quantité

$$\mathbb{E}_a[f(X_n)]$$

admet une limite lorsque n tend vers l'infini? Si oui, quelle est cette limite? Si non, y a-t-il une autre quantité, analogue, qui admette une limite?

Solution de l'exercice 4

1. Le graphe est connexe, donc la marche aléatoire sur ce graphe est une chaîne de Markov irréductible. Tous les états sont donc de même nature (récurrents ou transients), et comme l'espace d'états est fini, ils sont tous récurrents. La chaîne admet donc une mesure invariante unique à multiplication près par une constante strictement positive, donc une unique mesure de probabilité invariante.

Pour déterminer cette probabilité invariante, on utilise le fait que la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible, donc invariante, pour la marche aléatoire sur le graphe. Cette mesure associe respectivement les masses 4, 3 et 1 aux sommets a , b et f .

La masse totale de cette mesure est 24 (c'est deux fois le nombre d'arêtes). Ainsi, les masses des sommets a , b , f pour l'unique probabilité invariante π sont

$$\pi(a) = \frac{1}{6}, \quad \pi(b) = \frac{1}{8}, \quad \pi(f) = \frac{1}{24}.$$

2. Le temps moyen de retour est donné par l'inverse de la masse attribuée par la probabilité invariante :

$$\mathbb{E}_d[T_d] = \frac{1}{\pi(d)} = 8.$$

3. L'unique mesure invariante ν qui associe à c la masse 1 associe à chaque autre sommet une masse égale au nombre moyen de visites en ce sommet entre deux visites en c . On a $\nu = \pi/\pi(c)$, donc le nombre moyen de visites en a entre deux visites en c vaut

$$\nu(a) = \frac{\pi(a)}{\pi(c)} = \frac{4}{3}.$$

4. Puisque la chaîne est irréductible et récurrente, le théorème ergodique assure que la quantité considérée converge $\mathbb{P}_a$ -presque sûrement vers

$$\pi(M) = \frac{1}{2}.$$

5. Partant de a , la marche est toujours dans l'ensemble M aux temps impairs. Ainsi, la période de la chaîne est 2, et le théorème de convergence vers l'équilibre ne s'applique pas. Par exemple, si $f = \mathbf{1}_{\{a\}}$, alors $\mathbb{E}_a[f(X_{2n+1})] = 0$ pour tout $n \geq 0$, alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_a[f(X_{2n})] = \frac{1}{3}.$$

Par contre, la suite

$$\mathbb{E}_a[f(X_{2n})]$$

converge lorsque n tend vers l'infini.

———— FIN DU SUJET ————