Sorbonne Université
Probabilités approfondies – MU4MA011

2023 – 2024
4 juin 2024

Examen – Deuxième session

L'examen dure trois heures.
Les quatre exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3).
Les cinq questions sont indépendantes.

1. On munit l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de la tribu de toutes ses parties $\mathscr{B}$ et de la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Sur $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$, on définit la variable aléatoire X en posant $X(i) = i$ pour tout $i \in \Omega$. On définit la sous-tribu $\mathscr{C} = \sigma\big(\{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 6\}\}\big)$ de $\mathscr{B}$.

Déterminer le cardinal de $\mathscr{C}$ et calculer la variable aléatoire $\mathbb{E}[X|\mathscr{C}]$.

2. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne un vecteur gaussien (X, Y) centré tel que $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 2$ et $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$.

Calculer $\mathbb{E}[X|X - Y]$.

3. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles dont la loi admet, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, la densité f donnée par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) = c\,\mathbf{1}_{[0,1]}(x^2 + y^2).$$

Déterminer la constante c et calculer $\mathbb{E}\big[|Y|\big|X\big]$.

4. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne deux variables aléatoires X et Y indépendantes. On suppose que X est intégrable et que sa loi admet par rapport à la mesure de Lebesgue une densité strictement positive, notée f. On suppose de plus que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Calculer $\mathbb{E}[X|X + Y]$.

5. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne quatre variables aléatoires intégrables X, Y, U, V. On suppose que le couple (X, Y) a même loi que le couple (U, V).

Peut-on affirmer que $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[U|V]$ ont même loi ? (On donnera une démonstration ou un contre-exemple.)

Exercice 2

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On pose $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Enfin, on se donne un temps d'arrêt T pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

On suppose les $(X_k)_{k\geqslant 1}$ intégrables et $T < +\infty$ presque sûrement. On note $a = \mathbb{E}[X_1]$.

1. Montrer que $(S_n - na)_{n\geqslant 0}$ est une martingale. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a l'égalité $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] = a\mathbb{E}[n \wedge T]$.

2. On suppose dans cette question que les $(X_k)_{k\geqslant 1}$ sont positives. Montrer que $\mathbb{E}[S_T] = a\mathbb{E}[T]$.

3. On ne suppose plus les $(X_k)_{k\geqslant 1}$ positives, mais on suppose que $\mathbb{E}[T] < +\infty$. Montrer que la variable aléatoire $W = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_T|$ est intégrable. En déduire que S_T est intégrable et que $\mathbb{E}[S_T] = a\mathbb{E}[T]$.

On suppose désormais les $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de carré intégrable et tels que $\mathbb{E}[X_1] = 0$. On suppose de plus que $\mathbb{E}[T] < +\infty$. On note $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1)^2]$.

4. Montrer que $(S_n^2 - n\sigma^2)_{n\geqslant 0}$ est une martingale. En déduire que $\mathbb{E}[(S_{n\wedge T})^2] = \sigma^2\mathbb{E}[n \wedge T]$ pour tout $n \geqslant 0$.

5. Montrer que $(S_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ est une martingale bornée dans L^2 et en déduire $\mathbb{E}[(S_T)^2] = \sigma^2\mathbb{E}[T]$.

Exercice 3

Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3).

Soit E un espace d'états et P un noyau de transition markovien sur E. Soit π une mesure de probabilité sur E. On suppose que π est invariante pour P et que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$.

1. Les hypothèses permettent-elles d'affirmer quelque chose sur l'irréductibilité de P, sur la récurrence ou la transience des états de E, et sur l'unicité d'une mesure de probabilité invariante pour P ?

Soit $Q : E \times E \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$Q(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x).$$

2. Montrer que Q est un noyau de transition sur E et que π est une mesure de probabilité invariante pour Q.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, X = (X_n)_{n\geqslant 0})$ une chaîne de Markov sur E de noyau de transition P. Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Pour tout entier n compris entre 0 et N, on pose

$$Y_n = X_{N-n}.$$

3. Calculer $\mathbb{P}_\pi(Y_0 = x_0, \cdots, Y_N = x_N)$ pour tous $x_0, \ldots, x_N \in E$. En déduire que, sous $\mathbb{P}_\pi$, $(Y_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une chaîne de Markov dont on précisera le noyau de transition.

Soit $p \in]0, 1[$ un réel. On considère le cas où $E = \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{N}$,

$$P(x, y) = p\mathbf{1}_{\{y=x+1\}} + (1-p)\mathbf{1}_{\{y=0\}}.$$

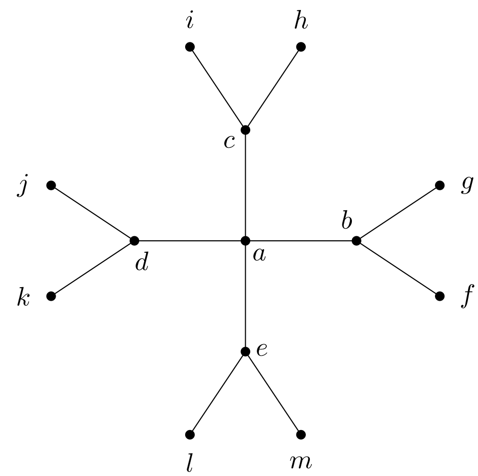
4. Déterminer une mesure de probabilité invariante pour P, et déterminer si elle est unique.

5. Calculer le noyau de transition Q et dessiner des trajectoires typiques de X et Y dans ce cas.

Exercice 4

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On étudie la marche aléatoire sur le graphe représenté ci-dessous.



1. Déterminer la masse de chacun des états a, b et f pour l'unique mesure de probabilité invariante pour cette marche aléatoire.

2. Partant de d, combien de temps la marche aléatoire met-elle, en moyenne, à revenir en d ?

3. Partant de c, combien de fois la marche visite-t-elle, en moyenne, le sommet a avant de revenir pour la première fois à son point de départ ?

4. Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire. On note $M = \{b, c, d, e\}$. La quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_M(X_i)$$

admet-elle sous $\mathbb{P}_a$ une limite presque sûre lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

5. Est-il vrai que pour toute fonction f à valeurs réelles sur l'ensemble des sommets de notre graphe, la quantité

$$\mathbb{E}_a[f(X_n)]$$

admet une limite lorsque n tend vers l'infini ? Si oui, quelle est cette limite ? Si non, y a-t-il une autre quantité, analogue, qui admette une limite ?

— Fin du sujet —