# Examen

*Le sujet fait trois pages.*
*L'examen dure trois heures.*
*Les cinq exercices sont indépendants.*
*Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.*
*Le barème est indicatif. La note finale sera sur* 50 *points.*

## Exercice 1

*Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3).*
*Les cinq questions sont indépendantes.*

**1.** On munit l'ensemble $[0,1]$ de la tribu borélienne $\mathscr{B}$ et de la mesure de Lebesgue $\lambda$. Sur $([0,1],\mathscr{B},\lambda)$, on définit la variable aléatoire $X$ par par $X(t)=t$ pour tout $t\in[0,1]$. On définit la sous-tribu $\mathscr{C}=\sigma\big(\big\{\big[0,\frac{1}{2}\big],\big[\frac{1}{3},1\big]\big\}\big)$ de $\mathscr{B}$.

Calculer et représenter graphiquement la variable aléatoire $\mathbb{E}[X|\mathscr{C}]$.

**2.** Sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, on se donne un vecteur gaussien $(X,Y)$ centré tel que $\mathrm{Var}(X)=1$, $\mathrm{Var}(Y)=2$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)=1$.

Calculer $\mathbb{E}[X|X+Y]$.

**3.** Sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, on se donne un couple $(X,Y)$ de variables aléatoires réelles dont la loi admet, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, la densité $f$ donnée par

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad f(x,y)=c\,(1+y)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(|x|+|y|).$$

Déterminer la constante $c$ et calculer $\mathbb{E}[Y|X]$.

**4.** Sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, on se donne un couple $(X,Y)$ de variables aléatoires réelles tel que pour tout entier $n\geqslant 1$ et tous réels positifs $0\leqslant a\leqslant b$, on ait

$$\mathbb{P}\big(X=n,\,Y\in[a,b]\big)=\int_a^b e^{-2^n t}\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$.

**5.** Sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, on se donne deux variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes. On suppose que $X$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,\pi]$ et $Y$ la loi gaussienne centrée de variance 1.

Calculer $\mathbb{E}[\cos(X+Y^2)|Y]$.

## Exercice 2

*Barème indicatif : 5 points.*

Existe-t-il sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0},\mathbb{P})$ une martingale $(M_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\mathbb{E}[M_n^2]<\infty$ pour tout $n\geqslant 0$ et telle que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge dans $L^1$ mais ne converge pas dans $L^2$ ?

## Exercice 3

*Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3).*

On travaille sur un espace de probabilité dont la mesure est notée $\mathbb{P}$. Soient $p$ et $q$ des réels strictement positifs tels que $p+q=1$. On se donne une suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que pour tout $n\geqslant 1$, on ait $\mathbb{P}(Z_n=1)=p$ et $\mathbb{P}(Z_n=-1)=q$.

On définit par récurrence deux suites $(W_n)_{n\geqslant 0}$ et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires en posant

$$\begin{aligned} W_0 = 0 \ \text{ et pour tout } \ n\geqslant 1,\ W_n &= W_{n-1}+Z_n,\\ Y_0 = 0 \ \text{ et pour tout } \ n\geqslant 1,\ \ Y_n &= Y_{n-1}+Z_n+\mathbf{1}_{\{Y_{n-1}=0\}}(1-Z_n). \end{aligned}$$

**1.** Montrer que $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$.
**2.** Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$.
**3.** Montrer que $\mathbb{P}$-presque sûrement, pour tout $n\geqslant 0$, on a $W_n\leqslant Y_n$.

Sur $\mathbb{N}$, on définit de le noyau de transition $P$ en posant, pour tout $i\geqslant 1$, $P(i,i+1)=p$ et $P(i,i-1)=q$, et $P(0,1)=1$. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0},(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{N}},(X_n)_{n\geqslant 0})$ sur $\mathbb{N}$ de noyau de transition $P$.

**4.** Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible, puis déterminer une mesure $\mu$ sur $\mathbb{N}$ invariante pour cette chaîne et telle que $\mu(1)=1$.

**5.** On suppose $p\neq\frac{1}{2}$. Déterminer, en discutant suivant la valeur de $p$, si la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de noyau de transition $P$ est récurrente ou transiente.

## Exercice 4

*Barème indicatif : 15 points (3+3+3+3+3).*

Sur un espace d'états $E$, on se donne un noyau de transition markovien $P$. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0},(\mathbb{P}_x)_{x\in E},(X_n)_{n\geqslant 0})$ sur $E$ de noyau de transition $P$. On suppose cette chaîne irréductible.

Soit $B$ une partie de $E$ qui n'est ni vide ni égale à $E$. On pose $H=\inf\{n\geqslant 0 : X_n\in B\}$ et, pour tout $x\in E$, $h(x)=\mathbb{E}_x[H]$.

**1.** Montrer que la fonction $h$ satisfait la relation

$$\forall x\in B, h(x)=0 \ \text{ et } \ \forall x\in E\setminus B,\ h(x)=1+\sum_{y\in E}P(x,y)h(y).$$

**2.** Calculer la fonction $h$ dans le cas de la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire de la chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de noyau de transition $P$ défini en posant, pour tout $i\in\mathbb{Z}$, $P(i,i+1)=P(i,i-1)=\frac{1}{2}$, et où on a posé $B=\mathbb{Z}_-=\{0,-1,-2,\ldots\}$.

**3.** On se donne deux éléments $x$ et $y$ distincts de $E\setminus B$. On pose $T=\inf\{n\geqslant 0 : X_n=y\}$ et $S=\inf\{n\geqslant T : X_n\in B\}$. Montrer que $\mathbb{E}_x[S]=\mathbb{E}_x[T]+h(y)$, puis que $h(x)\leqslant h(y)+\mathbb{E}_x[T]$.

On suppose désormais que $E$ est un ensemble fini et on note $A=E\setminus B$. Pour tous $x,y\in E$, on pose

$$m(x,y)=\mathbb{P}_x(X_H=y).$$

**4.** Calculer $m(x,y)$ lorsque $y$ appartient à $A$, puis lorsque $x$ appartient à $B$. Montrer que pour tous $a\in A$ et $b\in B$ on a

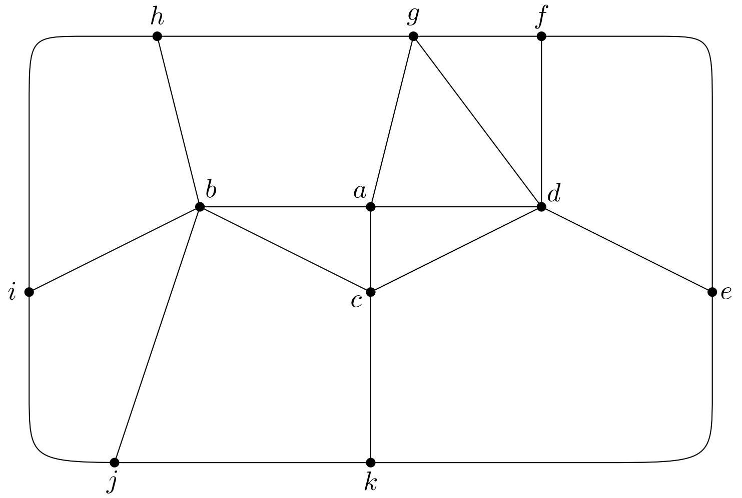
$$m(a,b)=\sum_{z\in E}P(a,z)m(z,b).$$

**5.** On fixe $a\in A$ et $b\in B$. Montrer que le processus $\big(m(X_{\min(H,n)},b)\big)_{n\geqslant 0}$ est sous $\mathbb{P}_a$ une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

## Exercice 5

*Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).*

On considère la marche aléatoire sur le graphe ci-dessous, inspiré d'un plan de métro.




**1.** Déterminer toutes les probabilités invariantes pour cette marche aléatoire.
**2.** Partant du sommet $e$, combien de temps met la marche, en moyenne, à revenir en $e$ ?
**3.** Entre deux visites en $g$, combien de fois la marche visite-t-elle, en moyenne, le sommet $k$ ?
**4.** Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire. La quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{a,b,c,d\}}(X_i)$$

admet-elle sous $\mathbb{P}_f$ une limite presque sûre lorsque $n$ tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

**5.** Soit $u : \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\} \to \mathbb{R}$ une fonction. La quantité $\mathbb{E}_a[u(X_n)]$ admet-elle une limite lorsque $n$ tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

Fin du sujet