Sorbonne Université **2022 – 2023**
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires **8 mars 2023**

Convergence de mesures — Grandes déviations — Percolation (Session 2)

Examen – Partie 2

Les quatre exercices sont indépendants.
Les exercices auront des poids comparables dans la note.
Cette deuxième partie de l'épreuve dure deux heures trente.
La consultation des notes de cours et du polycopié est autorisée.

Exercice 1

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ fixé.

1. Soit (E, d) un espace métrique. Soient $X, X_0, X_1, \dots$ des variables aléatoires à valeurs dans E dont on note respectivement $\mu, \mu_0, \mu_1, \dots$ les lois. Montrer que si la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers X, alors la suite $(\mu_k)_{k\geqslant 0}$ converge faiblement vers μ.

2. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que pour tous $n \geqslant 0$ et $t \in [0,1]$, on a $|f_n(t)| \leqslant 1$.
Soit $p \in [0,1]$ un réel. Soit $(B_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de loi de Bernoulli de paramètre p.
Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-n} f_n$$

définit une variable aléatoire à valeurs dans $C([0,1], \mathbb{R})$. On notera μ_p sa loi.

3. Montrer que la fonction $p \mapsto \mu_p$ est continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}))$.
<u>Indication</u> : on pourra considérer une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi uniforme sur $[0,1]$ et poser, pour tout $p \in [0,1]$, et pour une fonction J de deux variables simple et bien choisie, $G(p) = \sum_{n=0}^{\infty} J(p, U_n) e^{-n} f_n$.

4. La fonction $p \mapsto G(p)$ est-elle presque sûrement continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$? Est-elle presque sûrement continue au point $p = \frac{1}{3}$?

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dire sans justification si la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ de mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{R}$ satisfait ou non un principe de grandes déviations. Si elle en satisfait un, en préciser la fonction de taux. Si non, donner un argument.

1. $\mu_n = \delta_{x_n}$, où $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels qui tend vers 0
2. $\mu_n = \delta_n$
3. $\mu_{2n} = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{2}{3}\delta_1$ et $\mu_{2n+1} = \frac{2}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_1$
4. $\mu_n = \mu$, où μ est une mesure de probabilité fixée sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On fait l'hypothèse que la partie positive et la partie négative de X_1 sont d'espérance infinie, c'est-à-dire que $\mathbb{E}[X_1^+] = \mathbb{E}[X_1^-] = +\infty$.

1. Calculer la transformée de Legendre du logarithme de la transformée de Laplace de X_1.

2. Soit $c > 0$ un réel. Existe-t-il une constante $C \geqslant 0$ telle que pour n assez grand on ait

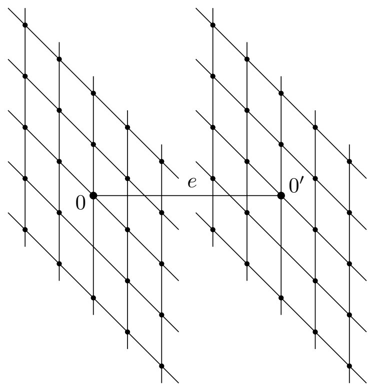
$$\mathbb{P}\big(n \leqslant X_1 + \ldots + X_n \leqslant \sqrt{3}\, n\big) \leqslant Ce^{-cn} \text{ ?}$$

3. On suppose désormais que la loi commune des $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est la loi de Cauchy : $\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$. En admettant au besoin que pour tout réel t on a $\mathbb{E}[e^{itX_1}] = e^{-|t|}$, déterminer le comportement asymptotique lorsque n tend vers l'infini de

$$\mathbb{P}\big(n \leqslant X_1 + \ldots + X_n \leqslant \sqrt{3}\, n\big).$$

Exercice 4

On considère la percolation sur le graphe représenté ci-dessous. Ce graphe est constitué de deux copies disjointes du graphe $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ qu'on a reliées par une arête, notée e, qui joint les origines, notées 0 et $0'$, de chaque copie de $\mathbb{L}^2$.



Pour tout $p \in [0,1]$, on pose

$$\psi(p) = \mathbb{P}_p(\text{l'agrégat de 0 est infini}).$$

On note par ailleurs $\theta(p)$ la probabilité de percolation dans le réseau $\mathbb{L}^2$, c'est-à-dire la probabilité, pour la percolation de paramètre p sur $\mathbb{L}^2$, que l'agrégat de l'origine soit infini.

1. Exprimer $\psi(p)$ en fonction de p et $\theta(p)$.

2. Déterminer la valeur de

$$p_c = \sup\{p \in [0,1] : \psi(p) = 0\}.$$

3. Si, le paramètre p étant fixé, on ajoute à notre graphe une arête reliant un sommet (autre que l'origine) d'une des deux copies de $\mathbb{L}^2$ au sommet correspondant de l'autre copie, comment, qualitativement, cela affecte-t-il $\psi(p)$?

———— Fin de la partie 2 ————