Sorbonne Université — **2022 – 2023**
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires — **25 janvier 2023**

Convergence de mesures — Grandes déviations — Percolation

Examen – Partie 1

Cette première partie de l'épreuve dure quarante-cinq minutes.
On traitera les trois questions de cours ci-dessous.
Elle comptera pour un quart de la note.
Aucun document n'est autorisé.

Question de cours 1

On rappelera la signification des mots soulignés.

Soit (E,d) un espace métrique. On considère l'espace $\mathcal{C}([0,1],E)$ des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans E et on le munit de la distance

$$D(x,y) = \sup\big\{d(x_t,y_t) : t \in [0,1]\big\}.$$

Montrer que la topologie induite sur $\mathcal{C}([0,1],E)$ par la distance D est la topologie compacte-ouverte.

Question de cours 2

On rappelera brièvement la signification des mots soulignés.

Soient a,b des nombres réels. On note $x \mapsto e^x$ la fonction exponentielle. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ln(e^{na} + e^{nb}).$$

Question de cours 3

On rappelera la signification des mots soulignés.

On se donne un entier $d \geqslant 1$ et on considère le modèle de percolation par arêtes sur le réseau $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. On se donne $p \in [0,1]$ et on note $\theta_d(p)$ la probabilité de percolation. Montrer que si $\theta_d(p) = 0$, alors il n'y a, $\mathbb{P}_p$-presque sûrement, pas d'agrégat infini dans une configuration de percolation.

——— Fin de la partie 1 ———

Examen – Partie 2

Les quatre exercices sont indépendants.
Les exercices auront des poids comparables dans la note.
Cette deuxième partie de l'épreuve dure deux heures trente.
La consultation des notes de cours et du polycopié est autorisée.

Exercice 1

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite $(G_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi gaussienne centrée réduite.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \geqslant 2$, on a $\mathbb{P}(|G_n| \geqslant x) \leqslant e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. En déduire que la suite $(n^{-1}|G_n|)_{n\geqslant 1}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement bornée. (On pourra commencer par montrer qu'elle est $\mathbb{P}$-p.s. inférieure ou égale à 2 à partir d'un certain rang.)

3. En déduire que pour tout réel $\alpha > 0$, avec probabilité 1, la série de terme général $(e^{-\alpha n} G_n)_{n\geqslant 1}$ est absolument convergente.

Pour tout réels $\alpha > 0$ et $t \in [0, 1]$, on pose

$$X_{\alpha,t} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n} G_n \cos(2\pi n t).$$

4. Montrer que $\mathbb{P}$-p.s., la fonction $(\alpha, t) \mapsto X_{\alpha,t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$.

5. Pour tout $\alpha > 0$, on note μ_α la loi de X_α. Montrer que l'application $\alpha \mapsto \mu_\alpha$ est continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathcal{M}(C([0, 1], \mathbb{R}))$.

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \geqslant 2$. On a

$$\mathbb{P}(|G_n| \geqslant x) = 2\mathbb{P}(G_n \geqslant x) = 2\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} \leqslant 2\int_x^{+\infty} \frac{t}{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

et pour $x \geqslant 2$, le coefficient devant l'exponentielle est (largement) inférieur à 1. L'inégalité donnée par l'énoncé est en fait vraie pour tout $x \geqslant 0$.

2. On applique le lemme de Borel–Cantelli. On a, d'après la question précédente,

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|G_n| \geqslant 2n) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} e^{-2n^2} < \infty.$$

Le lemme de Borel–Cantelli nous assure donc que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier n_0 (dépendant de ω) tel que

$$\forall n \geqslant n_0(\omega),\ |n^{-1} G_n(\omega)| < 2.$$

Ainsi,
$$\sup\{|n^{-1}G_n(\omega)| : n \geqslant 1\} \leqslant \max(|1^{-1}G_1(\omega)|, \ldots, |n_0(\omega)^{-1}G_{n_0(\omega)}(\omega)|, 2) < \infty.$$
La suite $(|n^{-1}G_n|)_{n\geqslant 1}$ est donc presque sûrement bornée.

3. D'après la question précédente, la variable aléatoire
$$C = \sup\{|n^{-1}G_n| : n \geqslant 1\}$$
est finie presque sûrement. On a donc presque sûrement
$$\sum_{n\geqslant 1} |e^{-\alpha n}G_n| \leqslant C \sum_{n\geqslant 1} ne^{-\alpha n} < \infty,$$
ce qu'on voulait démontrer.

4. Fixons un réel $\beta > 0$. Pour tout $\omega \in \{C < \infty\}$, tous réels $\alpha \geqslant \beta$ et $t \in [0, 1]$, et tout entier $n \geqslant 1$, nous avons
$$|e^{-\alpha n}G_n(\omega)\cos(2\pi nt)| \leqslant Cne^{-\beta n}$$
qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $X_{\alpha,t}(\omega)$ est la somme d'une série normalement convergente sur $[\beta, +\infty[\times [0, 1]$ de fonctions continues. C'est donc une fonction continue de (α, t) sur $[\beta, +\infty[\times [0, 1]$. Puisque ceci a lieu pour tout $\beta > 0$, c'est en fait une fonction continue de (α, t) sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$.

Ainsi, sur l'événement $\{C < +\infty\}$, la fonction $(\alpha, t) \mapsto X_{\alpha,t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$.

5. Pour montrer que l'application $\alpha \mapsto \mu_\alpha$ est continue, il suffit, puisque c'est une application entre deux espaces topologiques métrisables, de montrer qu'elle est séquentiellement continue.

Soit $\alpha > 0$, et $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de réels positifs qui converge vers α. On veut montrer que $\mu_{\alpha_k} \Longrightarrow \mu_\alpha$.

Pour ce faire, il faut montrer deux choses : d'une part que la convergence des lois marginales fini-dimensionnelles, et d'autre part la tension de la suite $(\mu_{\alpha_k})_{k\geqslant 0}$.

Soient $(t_1, \ldots, t_r)$ des éléments de $[0, 1]$. De la question précédente, il découle qu'on a la convergence presque sûre de vecteurs aléatoires
$$(X_{\alpha_k,t_1}, \ldots, X_{\alpha_k,t_r}) \underset{k\to\infty}{\overset{\mathbb{P}-\text{p.s.}}{\longrightarrow}} (X_{\alpha,t_1}, \ldots, X_{\alpha,t_r}).$$
De cette convergence presque sûre se déduit la convergence en loi, qui est le premier point qu'on voulait démontrer.

Pour démontrer la tension, on va utiliser le critère de Kolmogorov. Chaque variable aléatoire $X_{\alpha,t}$, qui est une limite presque sûre de variables aléatoires gaussiennes, est gaussienne, et admet donc des moments de tous ordres. En fait, le processus $(X_{\alpha,t})_{t\in[0,1]}$ lui-même est gaussien pour tout α (et même le processus $(X_{\alpha,t})_{(\alpha,t)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,1]}$).

Choisissons $s, t \in [0, 1]$ et $k \geqslant 0$. Notons $\beta > 0$ un minorant de la suite $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$. Nous avons
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[|X_{\alpha_k,t} - X_{\alpha_k,s}|^2\big] &= \mathbb{E}\bigg[\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_k n}G_n\big(\cos(2\pi nt) - \cos(2\pi ns)\big)\Big)^2\bigg] \\
&\leqslant 4\pi^2(t-s)^2\ \mathbb{E}\bigg[\Big(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\beta n}G_n\Big)^2\bigg] \\
&= 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2\beta n}\ (t-s)^2.
\end{aligned}$$

Le critère de Kolmogorov s'applique donc, avec $p = 2$ et $\beta = 1$ (le β de l'énoncé 2.4.4, qui n'est pas le minorant considéré plus haut). La suite $(\mu_{\alpha_k})_{k\geqslant 0}$ est donc tendue, et la convergence cherchée est démontrée.

Exercice 2

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de la loi commune

$$\tfrac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer et représenter sommairement le logarithme de la transformée de Laplace de la loi de X_1. On notera Λ cette fonction.

2. Calculer et représenter sommairement la transformée de Legendre de Λ.

3. Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\big(X_1 + \ldots + X_n \geqslant 2\sqrt{2}n\big).$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit λ un réel. On a

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x - |x|}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda+1)x}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{(\lambda-1)x}\,\mathrm{d}x.$$

Les deux intégrales sont finies si et seulement si $\lambda + 1 > 0$ et $\lambda - 1 < 0$, c'est-à-dire si et seulement si $|\lambda| < 1$. Dans ce cas, la transformée de Laplace vaut

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda-1}\Big) = \frac{1}{1-\lambda^2}.$$

Ainsi,

$$\Lambda(\lambda) = -\ln(1-\lambda^2).$$

2. La dérivée de Λ, donnée par

$$\Lambda'(\lambda) = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2},$$

est une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel. La valeur en x de la transformée de Legendre de Λ est donnée par

$$\Lambda^*(x) = \lambda_* x - \Lambda(\lambda_*),$$

où λ_* est l'unique élement de $]-1,1[$ tel que $\Lambda'(\lambda_*) = x$.

L'équation qui lie λ_* et x est quadratique en λ_* et se résout en

$$\lambda_* = \frac{1}{x}\big(\sqrt{1+x^2} - 1\big).$$

En utilisant le fait que $1 - \lambda_*^2 = \frac{2}{x}\lambda_*$, on en déduit que

$$\Lambda^*(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 + \ln(1-\lambda_*^2) = \sqrt{1+x^2} - 1 + \ln\big(\tfrac{2}{x^2}\big(\sqrt{1+x^2} - 1\big)\big),$$

ce qu'on peut écrire

$$\Lambda^*(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln x^2 + \ln\left(\sqrt{x^2+1} - 1\right) - \ln 2 + 1.$$

3. D'après le théorème de Cramér, cette limite existe vaut l'opposé de l'infimum de la fonction Λ^* sur l'intervalle $[2\sqrt{2}, +\infty[$. Cet infimum vaut

$$\Lambda^*(2\sqrt{2}) = 4 - \ln 8.$$

Exercice 3

Soit (E, d) un espace polonais. On dit qu'une suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ de mesures boréliennes de probabilités sur E est *exponentiellement tendue* si pour tout réel $\alpha \geqslant 0$, il existe une partie compacte K de E telle que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mu_n(K^c) < e^{-n\alpha}.$$

1. Montrer qu'une suite exponentiellement tendue de mesures boréliennes de probabilités sur E est tendue. Montrer par un exemple que la réciproque est fausse.

On se donne une suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ de mesures boréliennes de probabilité sur (E, d). On suppose que cette suite satisfait un principe de grandes déviations de fonction de taux I.

2. Montrer que si $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ est exponentiellement tendue, alors I est une bonne fonction de taux.

3. On suppose que $E = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$. Montrer que si I est une bonne fonction de taux, alors $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ est exponentiellement tendue. Quelle propriété particulière de $\mathbb{R}$ a-t-on utilisée ?

Solution de l'exercice 3

1. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Soit $\alpha = -\ln \varepsilon$. Soit K le compact de E donné par la tension exponentielle de la suite de mesures. Alors pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\mu_n(K^c) < e^{-n\alpha} = \varepsilon^n \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ est tendue.

Sur $E = \mathbb{R}$, considérons une suite constante $(\mu_n = \mu)_{n\geqslant 1}$, où μ donne une masse strictement positive à tout ouvert. Par exemple, on peut prendre la loi de Cauchy, ou la loi gaussienne centrée réduite. Alors la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement (puisqu'elle est constante), donc elle est tendue. En revanche, elle n'est pas exponentiellement tendue, car si elle l'était, en prenant $\alpha = 1$, on trouverait un compact K tel que pour tout $n \geqslant 1$, on ait

$$\mu(K^c) < e^{-n},$$

c'est-à-dire $\mu(K^c) = 0$. Or le complémentaire d'un compact de $\mathbb{R}$ n'est pas vide, et nous avons choisi μ de telle sorte que la mesure d'un ouvert non vide soit non nulle.

2. Soit $\alpha \geqslant 0$ un réel. Soit $\beta > \alpha$ un réel , et soit K un compact donné par la tension exponentielle de la suite de mesures appliquée à β, de sorte que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mu_n(K^c) < e^{-n\beta}$.

Montrons que l'ensemble de niveau $\{I \leqslant \alpha\}$ est inclus dans K, et donc compact. Pour cela, appliquons la borne inférieure du principe de grandes déviations à l'ouvert K^c : cela donne

$$-\inf_{x\in K^c} I(x) \leqslant \underline{\lim} \frac{1}{n} \ln \mu_n(K^c).$$

Par ailleurs, on a

$$\underline{\lim}\, \frac{1}{n} \ln \mu_n(K^c) \leqslant -\beta.$$

En combinant les deux inégalités, on trouve

$$\inf_{x \in K^c} I(x) \geqslant \beta,$$

si bien que $\{I \leqslant \alpha\} \subseteq K$, comme annoncé.

3. Soit $\alpha \geqslant 0$ un réel et soit $\beta > \alpha$. L'ensemble de niveau $\{I \leqslant \beta\}$ est compact. Il existe donc un réel $M \geqslant 0$ tel que

$$\{I \leqslant \beta\} \subset \;]-M, M[.$$

Notons qu'il est important d'avoir ici un intervalle ouvert dans le membre de droite.

La borne supérieure du principe de grandes déviations appliquée au fermé $(]-M, M[)^c$ nous donne

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n} \ln \mu_n\big((]-M, M[)^c\big) \leqslant -\beta.$$

En particulier, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$\mu_n([-M, M]^c) < e^{-n\alpha}.$$

La tension des mesures $\mu_1, \ldots, \mu_{n_0-1}$ assure l'existence de compacts $K_1, \ldots, K_{n_0-1}$ tels qu'on ait

$$\mu_1(K_1^c) < e^{-\alpha}, \ldots, \mu_{n_0-1}(K_{n_0-1}^c) < e^{-(n_0-1)\alpha}.$$

Le compact $K = K_1 \cup \ldots \cup K_{n_0-1} \cup [-M, M]$ est donc tel que pour tout $n \geqslant 1$, on ait

$$\mu_n(K^c) < e^{-n\alpha}.$$

On a utilisé le fait qu'un compact de $\mathbb{R}$ est inclus dans un ouvert dont l'adhérence est compacte. Ceci est une conséquence du fait que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est localement compacte.

Exercice 4

On considère la percolation par arêtes de paramètre $p \in [0, 1]$ sur le réseau carré bi-dimensionnel $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ et on s'intéresse aux deux questions suivantes, formulées de manière un peu vague.

(A) Peut-on connaître ou estimer la valeur du paramètre p en voyant un grand morceau ou même la totalité d'une configuration de percolation ?

(B) Dans le cas sur-critique, peut-on connaître la valeur du paramètre p en voyant seulement l'unique agrégat infini ?

Dans cet exercice, on ne se souciera pas des questions éventuelles de mesurabilité.

1. Proposer une réponse à la question A.

2. On se donne deux réels $p, q \in [0, 1]$. On réalise l'expérience aléatoire suivante, en deux étapes. On tire d'abord (c'est la première étape) une configuration de percolation de paramètre p sur $\mathbb{L}^2$. On note O l'ensemble (aléatoire) des arêtes ouvertes et on considère le graphe (aléatoire) $G = (\mathbb{Z}^2, O)$. On tire ensuite (c'est la deuxième étape) une configuration de percolation de paramètre q sur le graphe G.

Décrire aussi simplement que possible le résultat de cette opération.

Pour tout sous-ensemble $E \subseteq \mathbb{E}^2$ d'arêtes de $\mathbb{L}^2$, et pour tout $p \in [0,1]$, on note $\psi_E(p)$ la probabilité que dans une configuration de percolation par arêtes de paramètre p sur $(\mathbb{Z}^2, E)$, il y ait au moins un agrégat infini.

3. Décrire la fonction $p \mapsto \psi_{\mathbb{E}^2}(p)$.

On se donne $p > \frac{1}{2}$. On tire une configuration de percolation de paramètre p sur $\mathbb{L}^2$ et on note $I \subseteq \mathbb{E}^2$ l'ensemble (aléatoire) des arêtes ouvertes de l'unique agrégat infini.

4. Décrire, pour tout $q \in [0,1]$, la loi de la variable aléatoire $\psi_I(q)$.

5. Proposer une réponse à la question B.

6. On suppose toujours $p > \frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité qu'il existe deux droites parallèles du plan telles que l'agrégat infini soit inclus dans la bande délimitée par ces deux droites ?

Solution de l'exercice 4

1. D'après la loi forte des grands nombres, la proportion d'arêtes ouvertes dans un grand carré $B_n = [-n,n]^2$ converge presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, vers p. La proportion d'arêtes ouvertes dans une grande boîte est donc un estimateur sans biais de p.

2. Chaque arête de $\mathbb{E}^2$ est une arête ouverte de la configuration de percolation sur G avec probabilité pq, indépendamment de toutes les autres. Le résultat est donc une configuration de percolation de paramètre pq sur $\mathbb{L}^2$.

3. D'après les résultats du cours, pour $p \in [0, \frac{1}{2}]$, on a $\psi_{\mathbb{E}^2}(p) = 0$ et pour $p \in]\frac{1}{2}, 1]$, on a $\psi_{\mathbb{E}^2}(p) = 1$.

4. Reprenons l'expérience de la question 2. Nous tirons d'abord une configuration de percolation O de paramètre p, que nous allons noter ici O_1. L'ensemble I est l'ensemble des arêtes de l'unique agrégat infini de O_1. Ensuite, nous tirons dans O_1 une configuration de paramètre q, ce qui produit une configuration $O_2 \subseteq O_1$ de paramètre pq sur $\mathbb{L}^2$.

L'observation importante est que si O_2 contient un agrégat infini, cet agrégat est nécessairement inclus dans l'agrégat infini de O_1. Ainsi, $\psi_I(q) = \psi_{O_1}(q)$.

Or $\psi_{O_1}(q) = \psi_{\mathbb{E}^2}(pq)$. Ainsi,

$$\psi_I(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \leqslant \frac{1}{2p} \\ 1 & \text{si } q > \frac{1}{2p}. \end{cases}$$

5. En voyant l'agrégat infini I d'une percolation sur-critique, on peut calculer

$$q_c = q_c(I) = \sup\{q \in [0,1] : \text{une percolation de paramètre } q \text{ sur } I \text{ n'a aucun agrégat infini p.s.}\}$$

et retrouver p par la formule $p = \frac{1}{2q_c}$.

Concrètement, ceci signifie que la structure de l'agrégat sur-critique dépend vraiment de p. Pour chaque $p > \frac{1}{2}$, l'agrégat infini est un sous-graphe aléatoire de $\mathbb{L}^2$, et pour p et p' distincts, les lois de ces sous-graphes sont mutuellement singulières, c'est-à-dire qu'elles sont portées par des ensembles disjoints, en l'occurrence $\{J : q_c(J) = 1/2p\}$ et $\{J : q_c(J) = 1/2p'\}$.

6. Pour un ensemble d'arêtes J contenu entre deux droites parallèles du plan, on peut voir (en tronçonnant la bande délémitées par ces deux droites par des droites perpendiculaires et régulièrement espacées) que l'on a $\psi_J(q) = 0$ pour tout $q < 1$. Or on sait que presque sûrement, $\psi_I(q) = 1$ pour $q > 1/2p$. Ainsi, la probabilité pour que l'agrégat infini soit contenu dans une bande est nulle.