Sorbonne Université — 2022 – 2023

Probabilités approfondies – MU4MA011 — 28 octobre 2022

Partiel

L'épreuve dure deux heures.
Les trois exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 30 *points.*

Exercice 1

Barème indicatif : 10 points (1+1+1+1+2 ; 3+1).

Le but de cet exercice est d'illustrer qu'en toute généralité, aucune égalité ne peut être démontrée entre les espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{H}]\big|\mathscr{G}\big],\ \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\big|\mathscr{H}\big],\ \text{ et } \mathbb{E}[X|\mathscr{H},\mathscr{G}].$$

On considère trois variables aléatoires X, Y et Z intégrables, indépendantes et de même loi, de moyenne $\mathbb{E}(X) = \mu$.

1. (a) Calculer les espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[X+Y+Z|X+Z].$$

   (b) Rappeler en une phrase pourquoi il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\mathbb{E}[X|X+Y] = h(X+Y)$ presque sûrement.

   On *fixe* une telle fonction h pour la suite de la question 1.

   (c) Expliquer pourquoi $\mathbb{E}[Y|X+Y] = h(X+Y)$ presque sûrement.

   (d) Montrer que $\mathbb{E}[X|X+Y] = (X+Y)/2$.

   (e) En déduire les valeurs de

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y]\big|X+Z\big] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Z]\big|X+Y\big].$$

2. Dans cette question, on suppose que la loi commune des variables aléatoires X, Y et Z est la loi normale centrée réduite.

   (a) Trouver deux réels a et b tels que $X+Y+Z-a(X+Y)-b(X+Z)$ soit indépendant de $(X+Y, X+Z)$.

   (b) Calculer $\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y,X+Z]$.

Exercice 2

Barème indicatif : 5 points.

Soit $\lambda > 0$ un réel et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. Soit $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ une fonction mesurable positive. On note F la fonction de $\mathbb{R}$ vers $[0, \infty]$ définie par $F(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et par $F(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ pour $t > 0$. On rappelle que F est mesurable.

Exprimer $\mathbb{E}[f(X)|X+Y]$ en termes de F, X et Y.

Exercice 3

Barème indicatif : 15 points (3+3+2+3+3+1).

Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, définies sur un certain espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Chaque X_i est donc bien à valeurs dans $\{0, 1\}$, pas dans $\{-1, 1\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, avec la convention selon laquelle $S_0 = 0$. On définit la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ en posant $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = (-1)^{S_n}$ et $Z_n = Y_0 + \cdots + Y_n$.

1. Démontrer soigneusement que $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $T_k = \inf\{n \in \mathbb{N} \ : \ S_n = k\}$, avec la convention selon laquelle $\inf \varnothing = \infty$. C'est le temps d'atteinte de $\{k\}$ par $(S_n)_{n \geqslant 0}$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire T_k est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ et que T_k est fini presque sûrement.

Pour la suite de l'exercice, on admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[T_k] < \infty$. Lorsque vous utiliserez ce fait, mentionnez-le explicitement.

3. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, démontrer que $\mathbb{E}[Z_{T_k \wedge n}] = 1$, où l'on rappelle que $x \wedge y$ est une notation alternative pour $\min(x, y)$.
4. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[Z_{T_k}] = 1$.
5. Utiliser la question précédente pour établir, sans calculer les $\mathbb{E}[T_i]$, que pour tout $k \geqslant 1$, on a la formule suivante :

$$\mathbb{E}\left[(-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (T_{i+1} - T_i)\right] = 1.$$

6. En utilisant le résultat de la question 5, montrer que $\mathbb{E}[T_k] = 2k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Fin du sujet

Solution de l'exercice 1

1. (a) On écrit par linéarité, puis en utilisant d'une part le fait que $X+Y$ est $\sigma(X+Y)$-mesurable, et d'autre part le fait que Z est indépendante de $\sigma(X+Y)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y] &= \mathbb{E}[X+Y|X+Y]+\mathbb{E}[Z|X+Y],\\ &= X+Y+\mathbb{E}[Z]\\ &= X+Y+\mu.\end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Z] = X+Z+\mu.$$

L'argument qui consistait à dire "Z est indépendante de X et de Y, donc elle est indépendante de $X+Y$" est faux. Voici un contre-exemple. Sur l'espace $\Omega = \{a,b,c,d\}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme, on considère

$$X = \mathbf{1}_{\{a,b\}},\ Y = \mathbf{1}_{\{b,c\}},\ Z = \mathbf{1}_{\{a,c\}}.$$

Les variables X, Y, Z sont deux à deux indépendantes, chacune de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. En particulier, Z est indépendante de X, et Z est indépendante de Y. Pourtant, Z n'est pas indépendante de $X+Y$. C'est même une fonction de $X+Y$, en l'occurrence $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=1\}}$.

L'argument correct est le suivant. Les trois variables aléatoires X, Y, Z sont indépendantes. Par regroupement (theorème 2.7 du chapitre 1 du polycopié), ceci entraîne que deux les variables aléatoires (X,Y) et Z sont indépendantes. Puisque $X+Y$ est $\sigma(X,Y)$-mesurable, ceci entraîne que $X+Y$ et Z sont indépendantes.

(b) Les variables aléatoires réelles mesurables pour la tribu $\sigma(X+Y)$ sont exactemente les variables de la forme $h(X+Y)$ pour h une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme par définition $\mathbb{E}[X|X+Y]$ est $\sigma(X+Y)$-mesurable, on retrouve la forme demandée.

J'ai lu plusieurs fois que l'existence de h résultait "de la méthode de la fonction muette". Ceci me semble résulter d'une confusion. La méthode de la fonction muette existe *parce que* dans une telle situation, la fonction h existe. Plus précisément, c'est parce que l'on sait qu'on peut chercher l'espérance conditionnelle de X sachant $X+Y$ sous la forme $h(X+Y)$ qu'on peut ensuite déterminer h grâce à l'égalité $\mathbb{E}[Xg(X+Y)] = \mathbb{E}[h(X+Y)g(X+Y)]$, qui doit avoir lieu pour toute fonction (muette) mesurable bornée g.

(c) Dans l'écriture $\mathbb{E}[X|X+Y] = h(X+Y)$, la fonction h ne dépend (à égalité μ_{X+Y}-presque partout près) que de la loi du couple $(X, X+Y)$. Or, par symétrie, les couples $(X, X+Y)$ et $(Y, X+Y)$ ont la même loi. On a donc $\mathbb{E}[X|X+Y] = h(X+Y)$ et $\mathbb{E}[X|X+Y] = h(X+Y)$ pour la *même* fonction h.

L'argument "X et Y ont même loi, donc $(X, X+Y)$ et $(Y, X+Y)$ ont même loi" est faux. Considérons par exemple, sur l'espace $\Omega = \{a,b,c\}$ muni de la probabilité uniforme, les variables aléatoires

$$X = \mathbf{1}_{\{b\}} + 2\mathbf{1}_{\{c\}},\ Y = \mathbf{1}_{\{a\}} + 2\mathbf{1}_{\{b\}}.$$

Alors $\mathbb{P}((X, X+Y) = (2,3)) = 0$ mais $\mathbb{P}((Y, X+Y) = (2,3)) = \frac{1}{3}$.

L'argument "X et Y ont même loi, donc $\mathbb{E}[X|X+Y] = \mathbb{E}[Y|X+Y]$" est également faux. Dans l'exemple ci-dessus, X et Y sont mesurables par rapport à $X+Y$, et

$$\mathbb{E}[X|X+Y] = X \neq Y = \mathbb{E}[Y|X+Y].$$

J'ai aussi lu "X et Y ont même loi, donc pour tout événement A, on a $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A]$", qui est également faux : dans l'exemple ci-dessus, l'égalité est fausse pour tout A qui n'est ni $\varnothing$ ni Ω.

Une justification détaillée de l'argument de symétrie consistait à dire la chose suivante. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et de même loi, que nous notons μ. Le vecteur aléatoire (X, Y) est donc de loi $\mu \otimes \mu$. Le vecteur aléatoire (Y, X) est également, pour la même raison, de loi $\mu \otimes \mu$. Les vecteurs (X, Y) et (Y, X) ont donc même loi. En leur appliquant la même fonction $(u, v) \mapsto (u, u+v)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, on obtient donc deux vecteurs aléatoires de même loi : ces vecteurs sont $(X, X+Y)$ et $(Y, X+Y)$.

(d) On a

$$\mathbb{E}[X|X+Y] + \mathbb{E}[Y|X+Y] = \mathbb{E}[X+Y|X+Y] = X+Y,$$

la dernière égalité ayant lieu puisque $X+Y$ est par définition $\sigma(X+Y)$-mesurable. Or, on a $\mathbb{E}[X|X+Y]+\mathbb{E}[Y|X+Y] = 2h(X+Y)$ d'après la question (c). On en déduit $h(X+Y) = (X+Y)/2$, d'où le résultat.

(e) D'après la question (1a) , on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y]|X+Z] &= \mathbb{E}[X+Y+\mu|X+Z] \\ &= \mathbb{E}[X|X+Z] + \mathbb{E}[Y|X+Z] + \mu.\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, $\mathbb{E}[Y|X+Z] = \mu$ par indépendance, et $\mathbb{E}[X|X+Z] = \frac{X+Z}{2}$ d'après la question (d) (appliquée à (X, Z) plutôt qu'à (X, Y)). Finalement, on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y]|X+Z] = \frac{X+Z}{2} + 2\mu,$$

et par symétrie

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Z]|X+Y] = \frac{X+Y}{2} + 2\mu.$$

2. (a) Le vecteur (X, Y, Z) est un vecteur gaussien, car ses coordonnées sont des gaussiennes indépendantes. Par conséquent, l'indépendance entre des combinaisons linéaires de (X, Y, Z) est équivalente à la nullité de la covariance. On cherche donc a et b tels que :

$$\begin{cases}\mathbb{E}[(X+Y+Z-a(X+Y)-b(X+Z))(X+Y)] = 0, \\ \mathbb{E}[(X+Y+Z-a(X+Y)-b(X+Z))(X+Z)] = 0,\end{cases}$$

(les variables sont déjà centrées, il n'y a donc pas besoin de soustraire les espérances dans le calcul de la covariance). En développant les produits, et en utilisant le fait que $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2] = 1$ et $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[YZ] = 0$, cela se récrit

$$\begin{cases} (1-a-b)+(1-a)=0, \\ (1-a-b)+(1-b)=0. \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(a,b) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Il ne suffisait pas de dire "Les variables aléatoires sont gaussiennes, donc elles sont indépendantes si leur covariance est nulle". Pour construire un contre-exemple, onsidérons sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ une variable aléatoire X gaussienne centrée de variance 1, ainsi qu'une variable aléatoire ε indépendante de X et telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$. Posons $Y = \varepsilon X$. Alors Y est une variable aléatoire gaussienne. En effet, pour tout réel t,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant t) = \mathbb{P}(\varepsilon X \leqslant t) &= \mathbb{P}(\{\varepsilon X \leqslant t\} \cap \{\varepsilon = 1\}) + \mathbb{P}(\{\varepsilon X \leqslant t\} \cap \{\varepsilon = -1\}) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X \leqslant t) + \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(-X \geqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant t), \end{aligned}$$

la dernière égalité étant due au fait que X et $-X$ ont même loi. (On aurait aussi pu calculer la fonction caractéristique de Y).

La covariance de X et Y vaut $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\varepsilon X^2] = 0$. Pourtant,

$$\mathbb{P}(X \geqslant 0, Y \geqslant 0) = 0 \neq \tfrac{1}{4} = \mathbb{P}(X \geqslant 0)\mathbb{P}(Y \geqslant 0),$$

ce qui montre que X et Y ne sont pas indépendantes.

(b) On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y,X+Z] &= \mathbb{E}\left[X+Y+Z-\frac{2}{3}(X+Y)-\frac{2}{3}(X+Z)\Big|X+Y,X+Z\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\frac{2}{3}(X+Y)+\frac{2}{3}(X+Z)\Big|X+Y,X+Z\right] \\ &= 0 + \frac{2}{3}(X+Y) + \frac{2}{3}(X+Z), \end{aligned}$$

par indépendance du premier terme vis à vis de la tribu (et car les variables sont centrées), et par mesurabilité des deux autres termes.

On a donc

$$\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y,X+Z] = \frac{2}{3}(2X+Y+Z).$$

Solution de l'exercice 2

La fonction f est mesurable, donc $f(X)$ est une variable aléatoire. Cette variable aléatoire $f(X)$ est positive, donc elle admet une espérance conditionnelle sachant $X +$

Y. Cette espérance conditionnelle est de la forme $h(X+Y)$ pour une certaine fonction mesurable $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que nous allons déterminer.

Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode de la fonction muette : la fonction h est entièrement déterminée par le fait que pour toute fonction mesurable positive $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a l'égalité

$$\mathbb{E}[f(X)g(X+Y)] = \mathbb{E}[h(X+Y)g(X+Y)].$$

Nous allons partir du membre de gauche et le mettre sous la forme du membre de droite. Pour cela, il nous faudra connaître la loi de $X+Y$. On peut savoir que c'est une loi Γ, on peut aussi la calculer. Soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. On a

$$\mathbb{E}[k(X+Y)] = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^2} k(x+y) e^{-\lambda(x+y)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}(x,y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Pour calculer cette intégrale, on fait le changement de variable linéaire

$$(u,v) = (x+y, x), \text{ d'inverse } (x,y) = (v, u-v)$$

et dont le jacobien, constant, vaut 1. De plus, $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ si et seulement si $v \geqslant 0$ et $u \geqslant v$, ou encore si et seulement si $u \geqslant 0$ et $0 \leqslant v \leqslant u$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[k(X+Y)] = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^2} k(u) e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \mathbf{1}_{[0,u]}(v)\, \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

qu'on calcule en intégrant d'abord par rapport à v, pour trouver

$$\mathbb{E}[k(X+Y)] = \lambda^2 \int_0^{+\infty} k(u) u e^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u.$$

Calculons maintenant $\mathbb{E}[f(X)g(X+Y)]$. On trouve, en faisant le même changement de variables,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X)g(X+Y)] &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^2} f(x) g(x+y) e^{-\lambda(x+y)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}(x,y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^2} f(v) g(u) e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \mathbf{1}_{[0,u]}(v)\, \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\
&= \lambda^2 \int_0^{+\infty} g(u) e^{-\lambda u} \left(\int_0^u f(v)\, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

On voit apparaître la primitive F de f, et la densité de la loi de $X+Y$, à un facteur u près, par lequel il faut multiplier et diviser :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X)g(X+Y)] &= \lambda^2 \int_0^{+\infty} F(u) g(u) e^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u \\
&= \lambda^2 \int_0^{+\infty} \frac{F(u)}{u} g(u) u e^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{F(X+Y)}{X+Y} g(X+Y) \right].
\end{aligned}$$

Finalement, la fonction $h(u) = \frac{F(u)}{u}$ convient, et

$$\mathbb{E}[f(X)|X+Y] = \frac{F(X+Y)}{X+Y}.$$

Solution de l'exercice 3

1. Vérifions tout d'abord que pour tout n, la variable aléatoire Z_n est $\mathscr{F}_n$-*mesurable*. Pour $n = 0$, c'est clair car $Z_0 = 1$ est une variable aléatoire constante. Pour $n \geq 1$, si on note $f_n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto 1 + (-1)^{x_1} + \cdots + (-1)^{x_1+\cdots+x_n}$, on a $Z_n = f_n(X_1, \ldots, X_n)$. Or f_n est continue donc mesurable. Par définition de $\mathscr{F}_n$, Z_n est donc $\mathscr{F}_n$-mesurable.

Il s'agit maintenant de vérifier l'*intégrabilité* des Z_n, ce qui est clair car chacune de ces variables ne peut prendre qu'un nombre fini (dépendant de n) de valeurs qui elles mêmes sont toutes finies.

Soit enfin $n \in \mathbb{N}$. *Montrons que* $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathscr{F}_n] = Z_n$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}\left[Z_n + (-1)^{S_n+X_{n+1}}|\mathscr{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Z_n + (-1)^{S_n}(-1)^{X_{n+1}}|\mathscr{F}_n\right] \\
&= \mathbb{Z}_n + (-1)^{S_n}\mathbb{E}\left[(-1)^{X_{n+1}}|\mathscr{F}_n\right] && \text{car } Z_n \text{ et } S_n \text{ sont } \mathscr{F}_n\text{-mesurables} \\
&= Z_n + (-1)^{S_n}\mathbb{E}\left[(-1)^{X_{n+1}}\right] && \text{car } X_{n+1} \text{ est indépendante de } \mathscr{F}_n \\
&= Z_n + (-1)^{S_n}\left((-1)^0\tfrac{1}{2} + (-1)^1\tfrac{1}{2}\right) \\
&= Z_n + (-1)^{S_n} \times 0 = Z_n.
\end{aligned}$$

Donc (Z_n) est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale.

L'erreur la plus fréquente a consisté à affirmer que Y_{n+1} était indépendante de $\mathscr{F}_n$, ce qui n'est pas vrai.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\{T_k > n\} \in \mathscr{F}_n$. On a $\{T_k > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{S_i < k\}$. Pour tout $i \leq n$, on a $\{S_i < k\} = \{X_1 + \cdots + X_i < k\} \in \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_n$. Ainsi, $\{T_k > n\}$ appartient à la tribu $\mathscr{F}_n$, puisque c'est une intersection finie d'éléments de $\mathscr{F}_n$. Donc T_k est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$.

Établissons maintenant la finitude presque sûre de T_k. Le temps d'atteinte T_k est égal à $\inf\{n \in \mathbb{N} \ : \ S_n \geq k\}$ car $S_0 = 0$, les pas $S_{i+1} - S_i$ appartiennent à $\{0, 1\}$ et $k \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de démontrer que, presque sûrement, pour tout k assez grand, $S_n \geq k$. Pour démontrer cela, utilisons la loi forte des grands nombres. Elle est applicable ici car les X_i sont indépendantes, identiquement distribuées et intégrables. Ainsi, on sait que S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} > 0$, cela garantit que S_n converge presque sûrement vers l'infini, ce qui nous donne ce qu'on cherchait à établir.

Pour montrer que T_k est fini presque sûrement, on pouvait aussi (certaines et certains l'ont fait) montrer qu'avec probabilité 1, il existe k indices consécutifs $i, \ldots, i+k-1$ tels que $X_i = \ldots = X_{i+k-1} = 1$.

On pouvait aussi écrire que

$$\mathbb{P}(T_k > n) = \mathbb{P}(S_n < k) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{n}{\ell} 2^{-n}$$

et observer qu'on a une somme de k termes donc chacun tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, si bien que, grâce au théorème de convergence monotone pour les mesures,

$$\mathbb{P}(T_k = \infty) = \lim_{n\to\infty} \downarrow \mathbb{P}(T_k > n) = 0.$$

3. La variable aléatoire $T_k \wedge n$ est un temps d'arrêt en tant que minimum de deux temps d'arrêt. Comme (Z_i) est une $(\mathscr{F}_i)$-martingale et $T_k \wedge n$ est un $(\mathscr{F}_i)$-temps d'arrêt borné (par n), d'après le théorème d'arrêt, on a $\mathbb{E}[Z_{T_k\wedge n}] = \mathbb{E}[Z_0] = \mathbb{E}[1] = 1$.

On pouvait aussi dire que puisque T_k est un temps d'arrêt et Z une martingale, le processus arrêté $(Z_{T_k\wedge n})_{n\geqslant 0}$ est encore une martingale, si bien que

$$\mathbb{E}[Z_{T_k\wedge n}] = \mathbb{E}[Z_{T_k\wedge 0}] = \mathbb{E}[Z_0].$$

Pour cet argument, il n'était pas nécessaire d'utiliser le fait que le temps d'arrêt $T_k \wedge n$ était fini.

4. Comme T_k est fini presque sûrement, la suite $(Z_{T_k\wedge n})$ converge presque sûrement vers Z_{T_k} (en stationnant à partir du rang aléatoire T_k). Or pour tout n, on a $|Z_{T_k\wedge n}| = |Y_0 + \cdots + Y_{T_k\wedge n}| \leq |Y_0| + \cdots + |Y_{T_k\wedge n}| = (T_k \wedge n) + 1 \leq T_k + 1$, où la variable aléatoire $T_k + 1$ est intégrable (on a supposé $\mathbb{E}[T_k] < \infty$) et ne dépend pas de n. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. Ainsi, $1 = \mathbb{E}[Z_{T_k\wedge n}]$ converge vers $\mathbb{E}[Z_{T_k}]$ quand n tend vers l'infini. Donc $\mathbb{E}[Z_{T_k}] = 1$.

La majoration $|Z_{T_k\wedge n}| \leqslant n + 1$ est juste, mais elle ne permet pas de conclure, que la domination par $n + 1$ dépend de n.

5. Grâce à la question 4, il suffit de montrer que $Z_{T_k} = (-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(T_{i+1} - T_i)$. Par définition, $Z_{T_k} = \sum_{j=0}^{T_k}(-1)^{S_j}$. Comme les X_i sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ et $S_0 = 0$, la suite de variables aléatoires (T_i) est strictement croissante et on a $S_j = i$ pour tout $i \in \{T_i, \ldots, T_{i+1} - 1\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Z_{T_k} &= (-1)^{S_{T_k}} + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=T_i}^{T_{i+1}-1} (-1)^{S_j} \\ &= (-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=T_i}^{T_{i+1}-1} (-1)^i \\ &= (-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (T_{i+1} - T_i). \end{aligned}$$

6. Démontrons par récurrence forte que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[T_k] = 2k$. L'initialisation $k = 0$ est facile : $T_0 = 0$ et $\mathbb{E}[0] = 0 = 2 \times 0$. Établissons l'hérédité. Soit $k \geq 1$.

Supposons la propriété établie pour tous les $i < k$ et montrons $\mathbb{E}[T_k] = 2k$. D'après la question 5 et parce qu'on a supposé tous les T_i d'espérance finie, on a, grâce à la linéarité de l'espérance et à l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}\left[(-1)^k + \sum\nolimits_{i=0}^{k-1} (-1)^i (T_{i+1} - T_i)\right] \\
&= (-1)^k + \sum\nolimits_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(\mathbb{E}[T_{i+1}] - \mathbb{E}[T_i]\right) \\
&= (-1)^k + (-1)^{k-1}(\mathbb{E}[T_k] - 2(k-1)) + \sum\nolimits_{0 \leq i < k-1} (-1)^i (2(i+1) - 2i) \\
&= (-1)^k + (-1)^{k-1}(\mathbb{E}[T_k] - 2(k-1)) + 2 \sum\nolimits_{0 \leq i < k-1} (-1)^i \\
&= (-1)^k + (-1)^{k-1}(\mathbb{E}[T_k] - 2(k-1)) + 2 \tfrac{(-1)^{k-1} - 1}{(-1) - 1} \\
&= (-1)^k + (-1)^{k-1}(\mathbb{E}[T_k] - 2(k-1)) + (1 + (-1)^k)
\end{aligned}$$

En soustrayant 1 de part et d'autre et en divisant par $(-1)^k$, on obtient $0 = 2 - \mathbb{E}[T_k] + 2(k-1)$ donc $\mathbb{E}[T_k] = 2k$. D'où l'hérédité. Ainsi, par récurrence forte, on a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la formule $\mathbb{E}[T_k = 2k]$ était valide.

Remarque. Il existe des démonstrations plus directes de la formule établie à la question 6 que celle proposée par ce sujet. Notamment, on peut utiliser la martingale $(S_n - n/2)$. Une fois la formule de la question 6 connue, il est possible (si elle nous intéresse) d'en déduire celle de la question 5.