Partiel

L'épreuve dure deux heures.
Les trois exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 30 *points.*

Exercice 1

Barème indicatif : 10 points (1+1+1+1+2 ; 3+1).

Le but de cet exercice est d'illustrer qu'en toute généralité, aucune égalité ne peut être démontrée entre les espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{H}]\big|\mathscr{G}\big],\ \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\big|\mathscr{H}\big],\ \text{ et } \mathbb{E}[X|\mathscr{H},\mathscr{G}].$$

On considère trois variables aléatoires X, Y et Z intégrables, indépendantes et de même loi, de moyenne $\mathbb{E}(X) = \mu$.

1. (a) Calculer les espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[X+Y+Z|X+Z].$$

   (b) Rappeler en une phrase pourquoi il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\mathbb{E}[X|X+Y] = h(X+Y)$ presque sûrement.

   On *fixe* une telle fonction h pour la suite de la question 1.

   (c) Expliquer pourquoi $\mathbb{E}[Y|X+Y] = h(X+Y)$ presque sûrement.

   (d) Montrer que $\mathbb{E}[X|X+Y] = (X+Y)/2$.

   (e) En déduire les valeurs de

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y]\big|X+Z\big] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Z]\big|X+Y\big].$$

2. Dans cette question, on suppose que la loi commune des variables aléatoires X, Y et Z est la loi normale centrée réduite.

   (a) Trouver deux réels a et b tels que $X+Y+Z-a(X+Y)-b(X+Z)$ soit indépendant de $(X+Y, X+Z)$.

   (b) Calculer $\mathbb{E}[X+Y+Z|X+Y, X+Z]$.

Exercice 2

Barème indicatif : 5 points.

Soit $\lambda > 0$ un réel et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. Soit $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ une fonction mesurable positive. On note F la fonction de $\mathbb{R}$ vers $[0, \infty]$ définie par $F(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et par $F(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ pour $t > 0$. On rappelle que F est mesurable.

Exprimer $\mathbb{E}[f(X)|X+Y]$ en termes de F, X et Y.

Exercice 3

Barème indicatif : 15 points (3+3+2+3+3+1).

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, définies sur un certain espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Chaque X_i est donc bien à valeurs dans $\{0, 1\}$, pas dans $\{-1, 1\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, avec la convention selon laquelle $S_0 = 0$. On définit la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = (-1)^{S_n}$ et $Z_n = Y_0 + \cdots + Y_n$.

1. Démontrer soigneusement que $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $T_k = \inf\{n \in \mathbb{N} \ : \ S_n = k\}$, avec la convention selon laquelle $\inf \varnothing = \infty$. C'est le temps d'atteinte de $\{k\}$ par $(S_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire T_k est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et que T_k est fini presque sûrement.

Pour la suite de l'exercice, on admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[T_k] < \infty$. Lorsque vous utiliserez ce fait, mentionnez-le explicitement.

3. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, démontrer que $\mathbb{E}[Z_{T_k \wedge n}] = 1$, où l'on rappelle que $x \wedge y$ est une notation alternative pour $\min(x, y)$.
4. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[Z_{T_k}] = 1$.
5. Utiliser la question précédente pour établir, sans calculer les $\mathbb{E}[T_i]$, que pour tout $k \geqslant 1$, on a la formule suivante :

$$\mathbb{E}\left[(-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (T_{i+1} - T_i)\right] = 1.$$

6. En utilisant le résultat de la question 5, montrer que $\mathbb{E}[T_k] = 2k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

——— Fin du sujet ———