

## Examen – Deuxième session

*L'examen dure trois heures.*

*Le sujet occupe quatre pages.*

*Les quatre exercices sont indépendants.*

*Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.*

*Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 points.*

### Exercice 1

*Barème indicatif : 10 points (2+2+3+3).*

On munit l'ensemble  $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$  de la tribu de toutes ses parties et de la probabilité uniforme. On considère deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  sur  $\Omega$ , définies comme suit.

$\omega$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	$k$	$l$
$X(\omega)$	0	0	0	0	2	2	2	2	4	4	4	4
$Y(\omega)$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\mathbb{E}[X Y](\omega)$												

1. Déterminer la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .
2. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. Combien d'éléments a la tribu  $\sigma(Y)$  ? Et la tribu  $\sigma(X, Y)$  ?
4. Calculer  $\mathbb{E}[X|Y]$  et remplir la dernière ligne du tableau. (Seul le résultat est demandé, et vous pouvez joindre le sujet à votre copie après avoir mis votre nom dessus.)

### Solution de l'exercice 1

1. La variable aléatoire  $X$  prend les valeurs 0, 2 et 4, avec probabilités respectives

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{a, b, c, d\}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{e, f, g, h\}) = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(\{i, j, k, l\}) = \frac{1}{3}.$$

Ainsi,  $X$  a la loi uniforme sur l'ensemble  $\{0, 2, 4\}$ , ou encore la loi

$$\mathbb{P} \circ X^{-1} = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_4.$$

La variable aléatoire  $Y$  prend les valeurs 1, 2 et 3, et un calcul similaire montre que  $Y$  prend chacune de ces valeurs avec probabilité  $\frac{1}{3}$ . Ainsi, la loi de  $Y$  est uniforme sur l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ , ce qui peut s'écrire

$$\mathbb{P} \circ Y^{-1} = \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_3.$$

2. On a

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(\{a, d\}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9} = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1).$$

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont donc pas indépendantes.

3. Posons

$$B_1 = Y^{-1}(\{1\}) = \{a, d, g, j\}, \quad B_2 = Y^{-1}(\{2\}) = \{b, e, h, k\}, \quad B_3 = Y^{-1}(\{3\}) = \{c, f, i, l\}.$$

Les parties  $B_1, B_2, B_3$  forment une partition de  $\Omega$ . Notons  $\mathcal{H} = \sigma(\{B_1, B_2, B_3\})$  la tribu sur  $\Omega$  engendrée par cette partition. Nous allons montrer que  $\sigma(Y) = \mathcal{H}$ .

Tout d'abord, la tribu  $\sigma(Y)$  contient les ensembles  $Y^{-1}(\{1\})$ ,  $Y^{-1}(\{2\})$  et  $Y^{-1}(\{3\})$ , donc elle contient  $\mathcal{H}$ . Nous avons donc montré l'inclusion  $\mathcal{H} \subseteq \sigma(Y)$ .

Montrons maintenant que  $Y$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{H}$ . Soit  $B$  un borélien de  $\mathbb{R}$ . Alors l'égalité

$$Y^{-1}(B) = \bigcup_{y \in \{1, 2, 3\} \cap B} Y^{-1}(\{y\})$$

montre que  $Y^{-1}(B)$  appartient à  $\mathcal{H}$ . Ainsi,  $Y$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{H}$ , donc on a l'autre inclusion  $\sigma(Y) \subseteq \mathcal{H}$ .

Nous avons maintenant établi (plus en détail qu'il n'était demandé de le faire le jour de l'examen) que  $\sigma(Y) = \mathcal{H}$ .

La tribu  $\sigma(Y)$  est donc engendrée par une partition de  $\Omega$  en trois blocs non vides. Son cardinal est donc  $2^3 = 8$ .

Finalement,  $\sigma(Y)$  a 8 éléments.

Un raisonnement analogue montre que  $\sigma(X, Y)$  est la tribu sur  $\Omega$  engendrée par la partition

$$\Omega = \{a, d\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{e, h\} \cup \{f\} \cup \{g\} \cup \{i, l\} \cup \{j\} \cup \{k\}$$

qui a 9 blocs, donc

$$\sigma(X, Y) \text{ a } 2^9 = 512 \text{ éléments.}$$

4. La variable aléatoire  $\mathbb{E}[X|Y]$  est constante sur chaque bloc de la partition qui engendre la tribu  $\sigma(Y)$ , égale sur ce bloc à la valeur moyenne de  $X$  sur le bloc en question :

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B_i}]}{\mathbb{P}(B_i)} \mathbf{1}_{B_i}.$$

Or

$$\frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B_1}]}{\mathbb{P}(B_1)} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B_2}]}{\mathbb{P}(B_2)} = 2, \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B_3}]}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{5}{2}.$$

On peut donc compléter le tableau comme suit.

$\omega$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	$k$	$l$
$X(\omega)$	0	0	0	0	2	2	2	2	4	4	4	4
$Y(\omega)$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\mathbb{E}[X Y](\omega)$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

## Exercice 2

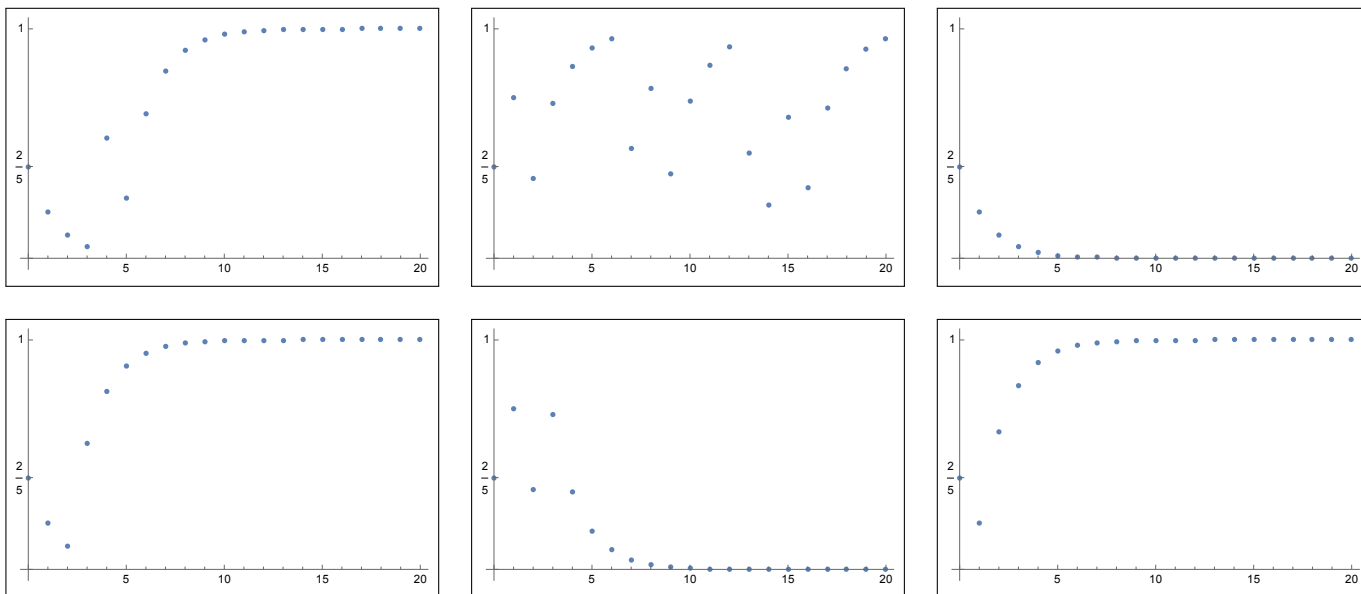
*Barème indicatif : 20 points (8+2+6+4).*

Sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , on se donne une suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Soit  $x_0 \in ]0, 1[$ . On définit par récurrence une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  de variables aléatoires en posant  $X_0 = x_0$  puis, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$X_{n+1} = \mathbf{1}_{\{U_{n+1} > X_n\}} \frac{X_n}{2} + \mathbf{1}_{\{U_{n+1} \leq X_n\}} \frac{X_n + 1}{2}.$$

Les graphiques ci-dessous représentent six simulations de la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  pour  $n$  compris entre 0 et 20 avec  $x_0 = \frac{2}{5}$ .



**1.** Montrer que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement.

On note  $X_\infty$  la limite presque sûre de la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$ .

**2.** Vérifier que pour tout  $n \geq 0$ , on a presque sûrement

$$2|X_{n+1} - X_n| \geq \min(|X_n|, |1 - X_n|).$$

**3.** Déterminer la loi de  $X_\infty$ .

**4.** Quelle est la probabilité que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  soit monotone à partir d'un certain rang? Autrement dit, que vaut

$$\mathbb{P}(\{\exists n \geq 0, \forall m \geq n, X_{m+1} > X_m\} \cup \{\exists n \geq 0, \forall m \geq n, X_{m+1} < X_m\})?$$

## Solution de l'exercice 2

1. Le nombre de points attribué à cette question indique que sa solution ne tient pas en une ligne, ou du moins qu'elle doit être rédigée avec soin.

Nous allons montrer que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale par rapport à une filtration bien choisie, bornée dans  $L^1$ . Le théorème fondamental de convergence des martingales bornées dans  $L^1$  nous permettra alors d'affirmer que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement. Procédons par étapes.

- La suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est bornée.

Pour tout réel  $x \in [0, 1]$ , les réels  $\frac{x}{2}$  et  $\frac{x+1}{2}$  appartiennent encore à  $[0, 1]$ . Ceci entraîne, par récurrence, que pour tout  $n \geq 0$ , la variable aléatoire  $X_n$  satisfait

$$\mathbb{P}(0 \leq X_n \leq 1) = 1.$$

La suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est donc bornée dans  $L^\infty$ , et en particulier dans  $L^1$ .

- Définition de la filtration et vérification du fait que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est adaptée par rapport à cette filtration.

Posons  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n).$$

Ceci définit une filtration sur  $\Omega$ . Montrons que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est adaptée par rapport à cette filtration.

Tout d'abord, la variable aléatoire  $X_0$ , qui est constante, est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_0$ . Supposons maintenant établi, pour un certain  $n \geq 0$ , que  $X_n$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_n$ . Alors par définition,  $X_{n+1}$  est une fonction de  $X_n$  et de  $U_{n+1}$ . Ces variables sont toutes deux mesurables par rapport à  $\mathcal{F}_{n+1}$ , par l'hypothèse de récurrence pour  $X_n$  et par définition de  $\mathcal{F}_{n+1}$  pour  $U_{n+1}$ . Ainsi,  $X_{n+1}$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_{n+1}$ .

- La suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

Nous savons déjà que les variables aléatoires  $X_n$ , qui sont bornées, sont intégrables; et nous savons déjà que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est adaptée par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Il reste à vérifier l'égalité caractéristique des martingales.

Donnons-nous donc  $n \geq 0$  et calculons  $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ . Il y a plusieurs manières de le faire, en voici une. Définissons une fonction  $g : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  en posant

$$g(x, u) = \mathbf{1}_{\{u > x\}} \frac{x}{2} + \mathbf{1}_{\{u \leq x\}} \frac{x+1}{2}.$$

Alors d'une part

$$X_{n+1} = g(X_n, U_{n+1})$$

et d'autre part, la variable aléatoire  $X_n$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_n$ , et la variable aléatoire  $U_{n+1}$  est indépendante de  $\mathcal{F}_n$ . Dans cette situation, un résultat du cours assure que

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[g(X_n, U_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = h(X_n),$$

où la fonction  $h$  est définie par le fait que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$h(x) = \mathbb{E}[g(x, U_{n+1})].$$

Calculons donc cette fonction  $h$ . Soit  $x \in [0, 1]$ . On a

$$h(x) = \mathbb{E}[g(x, U_{n+1})] = \int_0^1 g(x, u) du = \int_0^x \frac{x+1}{2} du + \int_x^1 \frac{x}{2} du = \frac{1}{2}(x(x+1) + x(1-x)) = x.$$

Ainsi, nous avons établi que

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n,$$

ce qui achève de montrer que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

- La suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement.

Le théorème de convergence des martingales appliqué à la martingale  $(X_n)_{n \geq 0}$ , bornée dans  $L^1$ , assure que cette suite de variables aléatoires converge presque sûrement.

**2.** Par définition,  $X_{n+1}$  vaut presque sûrement l'un des deux nombres  $\frac{X_n}{2}$  et  $\frac{1+X_n}{2}$ , si bien que  $|X_{n+1} - X_n|$  vaut l'un des deux nombres

$$\left| \frac{X_n}{2} - X_n \right| = \frac{|X_n|}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{1+X_n}{2} - X_n \right| = \frac{|1 - X_n|}{2}.$$

En particulier, presque sûrement,

$$2|X_{n+1} - X_n| \in \{|X_n|, |1 - X_n|\},$$

ce qui entraîne l'inégalité cherchée

$$2|X_{n+1} - X_n| \geq \min(|X_n|, |1 - X_n|).$$

**3.** Les simulations semblent suggérer que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  tend soit vers 0, soit vers 1. Or en faisant tendre  $n$  vers l'infini dans l'inégalité démontrée à la question précédente, les deux membres de l'inégalité convergent presque sûrement, respectivement vers  $2|X_\infty - X_\infty| = 0$  et vers  $\min(|X_\infty|, |1 - X_\infty|)$ . Nous en déduisons que

$$\min(|X_\infty|, |1 - X_\infty|) = 0$$

presque sûrement, ce qui entraîne que

$$\mathbb{P}(X_\infty \in \{0, 1\}) = 1.$$

Pour déterminer la loi de  $X_\infty$ , il ne reste qu'à déterminer  $\mathbb{P}(X_\infty = 1)$ , qui est aussi l'espérance de  $X_\infty$ .

Or la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement vers  $X_\infty$  en étant dominée par 1. Le théorème de convergence dominée assure donc que la convergence a aussi lieu dans  $L^1$ , et donc que

$$\mathbb{E}[X_\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n].$$

Or la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$ , qui est une martingale, est d'espérance constante, si bien que

$$\mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0] = x_0.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(X_\infty = 1) = x_0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_\infty = 0) = 1 - x_0.$$

Autrement dit, la variable aléatoire  $X_\infty$  a la loi de Bernoulli de paramètre  $x_0$ .

4. Avant de rédiger précisément, cherchons à comprendre ce qui se passe. Plaçons-nous sur l'événement  $X_\infty = 1$ . Nous nous demandons si la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  tend vers 1 en croissant à partir d'un certain rang, ou s'il existe des rangs arbitrairement grands auxquels la suite fait un pas décroissant.

Puisque nous sommes sur l'événement  $X_\infty = 1$ , pour  $n$  assez grand,  $X_n$  est très proche de 1, disons supérieur à  $\frac{9}{10}$ . Mais alors s'il existait un  $n$  tel que  $X_{n+1} < X_n$ , on aurait nécessairement

$$X_{n+1} = \frac{X_n}{2} < \frac{1}{2} < \frac{9}{10}.$$

Ce n'est pas possible.

Pour écrire cela rigoureusement, on peut par exemple écrire que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\{X_{n+1} < X_n\} \subseteq \{X_{n+1} < \frac{1}{2}\}.$$

Ainsi, pour tout  $p \geq 0$ ,

$$\bigcup_{n \geq p} \{X_{n+1} < X_n\} \subseteq \bigcup_{n \geq p} \{X_{n+1} < \frac{1}{2}\},$$

et

$$\bigcap_{p \geq 0} \bigcup_{n \geq p} \{X_{n+1} < X_n\} \subseteq \bigcap_{p \geq 0} \bigcup_{n \geq p} \{X_{n+1} < \frac{1}{2}\}.$$

Or sur l'événement du membre de droite de l'inclusion, la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  prend une infinité de fois une valeur inférieure à  $\frac{1}{2}$ . Elle ne peut donc converger que vers 0. Ainsi,

$$\bigcap_{p \geq 0} \bigcup_{n \geq p} \{X_{n+1} < X_n\} \subseteq \{X_\infty = 0\}.$$

En passant aux complémentaires, on en déduit que

$$\{X_\infty = 1\} \subseteq \bigcup_{p \geq 0} \bigcap_{n \geq p} \{X_{n+1} \geq X_n\}.$$

En français : sur l'événement où  $X_\infty = 1$ , la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est croissante à partir d'un certain rang.

On démontre de la même manière que

$$\{X_\infty = 0\} \subseteq \bigcup_{p \geq 0} \bigcap_{n \geq p} \{X_{n+1} \leq X_n\}.$$

Finalement, la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est presque sûrement soit décroissante à partir d'un certain rang, soit croissante à partir d'un certain rang.

Une autre manière de démontrer le même résultat est la suivante. Pour tout  $n \geq 1$ , notons

$$A_n = \{X_{n-1} < X_n\} \cap \{X_n > X_{n+1}\} \quad \text{et} \quad B_n = \{X_{n-1} > X_n\} \cap \{X_n < X_{n+1}\}.$$

Sur l'événement  $A_n$ , on a  $X_n = \frac{1+X_n}{2} > \frac{1}{2}$  et  $X_{n+1} = \frac{X_n}{2}$ , donc  $|X_{n+1} - X_n| = \frac{X_n}{2} > \frac{1}{4}$ . De même, sur  $B_n$ , on a  $X_n = \frac{X_{n+1}}{2} < \frac{1}{2}$  et  $X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}$ , donc  $|X_{n+1} - X_n| = \frac{1-X_n}{2} > \frac{1}{4}$ . Ainsi, nous venons de démontrer l'inclusion

$$A_n \cup B_n \subseteq \{|X_{n+1} - X_n| > \frac{1}{4}\}.$$

Puisque la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement, presque tout élément de l'espace de probabilité n'appartient à  $\{|X_{n+1} - X_n| > \frac{1}{4}\}$ , donc à  $A_n \cup B_n$ , que pour un nombre fini de valeurs de  $n$ . Ainsi, presque sûrement, à partir d'un certain rang, la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est monotone.



### Exercice 3

*Barème indicatif : 20 points (2+2+6+6+4).*

Soient  $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite d'éléments de  $]0, 1[$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on note  $q_i = 1 - p_i$ . Sur  $\mathbb{Z}$ , on considère le noyau de transition  $P$  donné par

$$\forall i \in \mathbb{Z}, P(i, i+1) = p_i \text{ et } P(i, i-1) = q_i.$$

On se donne une chaîne de Markov  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (\mathbb{P}_i)_{i \in \mathbb{Z}}, X = (X_n)_{n \geq 0})$  sur  $\mathbb{Z}$  de noyau de transition  $P$ .

**1.** Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible.

Soit  $f$  l'unique fonction  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f(0) = 0, f(1) = 1, \text{ et pour tout } i \in \mathbb{Z}, f(i) = p_i f(i+1) + q_i f(i-1).$$

Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on pose  $g(i) = f(i+1) - f(i)$ .

**2.** Exprimer  $g(i)$  en fonction de  $g(i-1)$  et montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante.

**3.** Montrer que sous  $\mathbb{P}_0$ , la suite  $(f(X_n))_{n \geq 0}$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

**4.** On suppose que la fonction  $f$  est bornée. On se donne un entier  $N \geq 1$ . On note  $\alpha = \min\{g(i) : -N-1 \leq i \leq N\}$ . Montrer que

$$\mathbb{P}_0(\exists n \geq 0, \forall m \geq n, |f(X_{m+1}) - f(X_m)| < \alpha) = 1.$$

En déduire que

$$\mathbb{P}_0(\exists n \geq 0, \forall m \geq n, |X_m| > N) = 1.$$

Que peut-on en conclure pour notre chaîne de Markov ?

**5.** Montrer que si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_{-1} \cdots p_{-k}}{q_{-1} \cdots q_{-k}} < \infty,$$

alors la chaîne de Markov est transiente.

### Solution de l'exercice 3

1. Puisque  $p_i > 0$  et  $q_i > 0$  pour tout  $i$ , on a  $i \rightarrow i+1$  et  $i+1 \rightarrow i$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, pour tous  $i < j \in \mathbb{Z}$ , on a

$$i \leftrightarrow i+1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow j-1 \leftrightarrow j$$

et la chaîne est irréductible.

2. La relation qui définit  $f$  peut s'écrire

$$p_i f(i+1) + q_i f(i-1) = (p_i + q_i) f(i),$$

c'est-à-dire

$$f(i+1) - f(i) = \frac{q_i}{p_i} (f(i) - f(i-1)),$$

ou encore

$$g(i) = \frac{q_i}{p_i} g(i-1).$$

Puisque  $g(0) = 1 > 0$ , et tous les  $p_i$  et  $q_i$  sont strictement positifs, cette relation entraîne par récurrence que  $g(i) > 0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . Ceci signifie exactement que  $f$  est strictement croissante.

3. La suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est adaptée par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , il en est donc de même de la suite  $(f(X_n))_{n \geq 0}$ .

Sous  $\mathbb{P}_0$ , on a presque sûrement, pour tout  $n \geq 0$ , l'inégalité  $-n \leq X_n \leq n$ . Ainsi,  $\mathbb{P}_0$ -presque sûrement,

$$|f(X_n)| \leq \max\{|f(-n)|, \dots, |f(n)|\}.$$

La variable aléatoire  $f(X_n)$  est donc bornée presque sûrement sous  $\mathbb{P}_0$ , et elle est donc en particulier intégrable.

Enfin, pour tout  $n \geq 0$ , la propriété de Markov faible nous donne

$$\mathbb{E}_0[f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[f(X_1)].$$

Or pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , en vertu de la relation satisfaite par  $f$ ,

$$\mathbb{E}_i[f(X_1)] = p_i f(i+1) + q_i f(i-1) = f(i).$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}_0[f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = f(X_n)$$

et la suite  $(f(X_n))_{n \geq 0}$  est bien une martingale vis-à-vis de la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

4. Puisque la fonction  $f$  est bornée, la martingale  $(f(X_n))_{n \geq 0}$  est bornée, donc bornée dans  $L^1$ . Elle converge donc presque sûrement.

Par ailleurs, puisque  $f$  est strictement croissante, le nombre  $\alpha$  est strictement positif. Il existe donc presque sûrement un rang à partir duquel  $|X_{m+1} - X_m| < \alpha$ , ce qu'exprime exactement la première égalité à démontrer.

Mais sur l'événement où il existe une infinité de valeurs de  $n$  pour lesquelles  $X_n$  appartient à  $\{-N, \dots, N\}$ , il existe aussi une infinité de valeurs de  $n$  pour lesquelles  $|X_{n+1} - X_n| \geq \alpha$ .

Comme ce deuxième événement est de probabilité nulle, il en est de même du premier. En passant au complémentaire, on obtient la deuxième égalité à démontrer.

On en déduit que partant de 0, on ne passe presque sûrement qu'un nombre fini de fois en 0. Autrement dit, l'état 0 est transient.

Nous avons donc démontré que si la fonction  $f$  est bornée, alors la chaîne de Markov est transiente.

5. On a  $g(0) = 1$  et pour tout  $i \geq 1$ ,  $g(i) = \frac{q_i}{p_i} g(i-1)$ . Ainsi, pour tout  $i \geq 1$ ,

$$g(i) = \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i}.$$

De même, pour tout  $i \geq 1$ ,

$$g(-i) = \frac{p_{-i+1} \cdots p_0}{q_{-i+1} \cdots q_0}.$$

Ainsi, on a

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(i) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k}$$

et

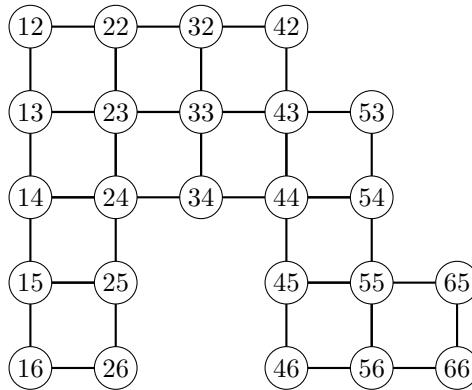
$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(-i) = -\frac{p_0}{q_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{-1} \cdots p_{-k}}{q_{-1} \cdots q_{-k}}.$$

L'hypothèse de l'énoncé assure donc que ces deux limites sont finies. Ceci assure que la fonction  $f$  est bornée, et, d'après la question précédente, que la chaîne est transiente.

### Exercice 4

*Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).*

Le plan au sol des tours de Jussieu est représenté ci-dessous. On considère ce plan comme un graphe dont les sommets sont les tours, et les arêtes sont les couloirs. On étudie la marche aléatoire sur ce graphe.



1. Déterminer la masse de chacune des tours  $\textcircled{53}$ ,  $\textcircled{54}$  et  $\textcircled{55}$  pour l'unique mesure de probabilité invariante pour cette marche aléatoire.
2. Partant de la tour  $\textcircled{15}$ , combien de temps la marche aléatoire met-elle, en moyenne, à y revenir ?
3. Partant de la tour  $\textcircled{15}$ , combien de fois la marche visite-t-elle, en moyenne, la tour  $\textcircled{65}$  avant de revenir pour la première fois à son point de départ ?
4. Notons  $(X_n)_{n \geq 0}$  la marche aléatoire. On note  $M = \{\textcircled{15}, \textcircled{16}, \textcircled{25}, \textcircled{26}\}$ . La quantité

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_M(X_i)$$

admet-elle sous  $\mathbb{P}_{\textcircled{15}}$  une limite presque sûre lorsque  $n$  tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

5. Est-il vrai que pour toute fonction  $f$  à valeurs réelles sur l'ensemble des sommets de notre graphe, la quantité

$$\mathbb{E}_{\textcircled{15}}[f(X_n)]$$

admet une limite lorsque  $n$  tend vers l'infini ? Si oui, quelle est cette limite ? Si non, y a-t-il une quantité similaire qui admette une limite pour toute fonction  $f$  ?

### Solution de l'exercice 4

1. Le graphe est connexe, donc la marche aléatoire sur ce graphe est une chaîne de Markov irréductible. Tous les états sont donc de même nature (récurrents ou transients), et comme l'espace d'états est fini, ils sont tous récurrents. La chaîne admet donc une mesure invariante unique à multiplication près par une constante strictement positive, donc une unique mesure de probabilité invariante.

Pour déterminer cette probabilité invariante, on utilise le fait que la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible, donc invariante, pour la marche aléatoire sur le graphe. Cette mesure associe respectivement les masses 2, 3 et 4 aux tours 53, 54 et 55.

La masse totale de cette mesure est 70. Ainsi, les masses sont

$$\pi(53) = \frac{1}{35}, \quad \pi(54) = \frac{3}{70}, \quad \pi(55) = \frac{2}{35}.$$

2. Le temps moyen de retour est donné par l'inverse de la masse attribuée par la probabilité invariante :

$$\mathbb{E}_{15}[T_{15}] = \frac{1}{\pi(15)} = \frac{70}{3}.$$

3. L'unique mesure invariante  $\nu$  qui associe à 15 la masse 1 associe à chaque autre sommet une masse égale au nombre moyen de visites en ce sommet entre deux visites en 15. On a  $\nu = \pi/\pi(15)$ , donc le nombre moyen de visites en 65 entre deux visites en 15 vaut

$$\nu(15) = \frac{\pi(65)}{\pi(15)} = \frac{2}{3}.$$

4. Puisque la chaîne est irréductible et récurrente, le théorème ergodique assure que la quantité considérée converge  $\mathbb{P}_{15}$ -presque sûrement vers

$$\pi(\{15, 16, 25, 26\}) = \frac{1}{7}.$$

5. À chaque pas de la marche, la parité de la somme des deux chiffres qui donnent le numéro de la tour change. Ainsi, il n'est possible de revenir à son point de départ qu'en un nombre pair de pas. Comme il est possible de revenir en 2 ou en 4 pas, la période de la chaîne est exactement 2.

En général, la quantité donnée par l'énoncé n'a pas de limite. Par exemple, si  $f = \mathbf{1}_{15}$ , l'espérance proposée est nulle si  $n$  est impair, et tend vers une limite strictement positive le long de la sous-suite des entiers pairs.

Par contre, la suite

$$\mathbb{E}_{\textcircled{15}}[f(X_{2n})]$$

converge lorsque  $n$  tend vers l'infini.