Sorbonne Université 2022 – 2023
Probabilités approfondies – MU4MA011 1er juin 2023

Examen – Deuxième session

L'examen dure trois heures.
Le sujet occupe quatre pages.
Les quatre exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 *points.*

Exercice 1

Barème indicatif : 10 points (2+2+3+3).

On munit l'ensemble $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ de la tribu de toutes ses parties et de la probabilité uniforme. On considère deux variables aléatoires réelles X et Y sur Ω, définies comme suit.

ω	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
$X(\omega)$	0	0	0	0	2	2	2	2	4	4	4	4
$Y(\omega)$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\mathbb{E}[X\|Y](\omega)$												

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.

2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Combien d'éléments a la tribu $\sigma(Y)$? Et la tribu $\sigma(X, Y)$?

4. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ et remplir la dernière ligne du tableau. (Seul le résultat est demandé, et vous pouvez joindre le sujet à votre copie après avoir mis votre nom dessus.)

Exercice 2

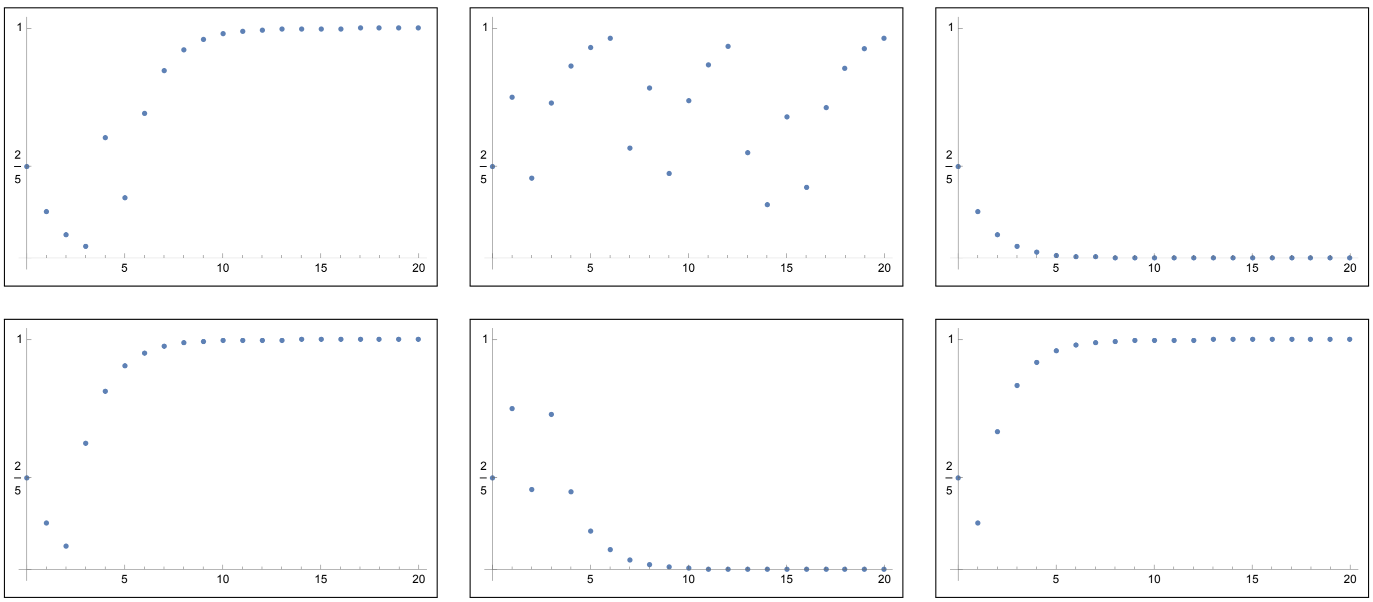
Barème indicatif : 20 points (8+2+6+4).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$.

Soit $x_0 \in]0,1[$. On définit par récurrence une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires en posant $X_0 = x_0$ puis, pour tout $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = \mathbf{1}_{\{U_{n+1} > X_n\}} \frac{X_n}{2} + \mathbf{1}_{\{U_{n+1} \leqslant X_n\}} \frac{X_n + 1}{2}.$$

Les graphiques ci-dessous représentent six simulations de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ pour n compris entre 0 et 20 avec $x_0 = \frac{2}{5}$.



1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement.

On note X_∞ la limite presque sûre de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Vérifier que pour tout $n \geqslant 0$, on a presque sûrement

$$2|X_{n+1} - X_n| \geqslant \min(|X_n|, |1 - X_n|).$$

3. Déterminer la loi de X_∞.

4. Quelle est la probabilité que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ soit monotone à partir d'un certain rang ? Autrement dit, que vaut

$$\mathbb{P}\big(\{\exists n \geqslant 0, \forall m \geqslant n, X_{m+1} > X_m\} \cup \{\exists n \geqslant 0, \forall m \geqslant n, X_{m+1} < X_m\}\big)?$$

Exercice 3

Barème indicatif : 20 points (2+2+6+6+4).

Soient $(p_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $q_i = 1 - p_i$.
Sur $\mathbb{Z}$, on considère le noyau de transition P donné par

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ P(i,i+1) = p_i \ \text{ et } P(i,i-1) = q_i.$$

On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_i)_{i\in\mathbb{Z}}, X = (X_n)_{n\geqslant 0})$ sur $\mathbb{Z}$ de noyau de transition P.

1. Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible.

Soit f l'unique fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1, \quad \text{et pour tout } i \in \mathbb{Z},\ f(i) = p_i f(i+1) + q_i f(i-1).$$

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $g(i) = f(i+1) - f(i)$.

2. Exprimer $g(i)$ en fonction de $g(i-1)$ et montrer que la fonction f est strictement croissante.

3. Montrer que sous $\mathbb{P}_0$, la suite $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

4. On suppose que la fonction f est bornée. On se donne un entier $N \geqslant 1$. On note $\alpha = \min\{g(i) : -N-1 \leqslant i \leqslant N\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}_0(\exists n \geqslant 0,\ \forall m \geqslant n,\ |f(X_{m+1}) - f(X_m)| < \alpha) = 1.$$

En déduire que

$$\mathbb{P}_0(\exists n \geqslant 0,\ \forall m \geqslant n,\ |X_m| > N) = 1.$$

Que peut-on en conclure pour notre chaîne de Markov ?

5. Montrer que si

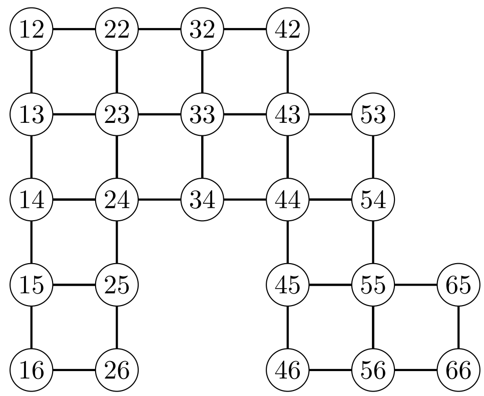
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_{-1} \cdots p_{-k}}{q_{-1} \cdots q_{-k}} < \infty,$$

alors la chaîne de Markov est transiente.

Exercice 4

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

Le plan au sol des tours de Jussieu est représenté ci-dessous. On considère ce plan comme un graphe dont les sommets sont les tours, et les arêtes sont les couloirs. On étudie la marche aléatoire sur ce graphe.



1. Déterminer la masse de chacune des tours (53), (54) et (55) pour l'unique mesure de probabilité invariante pour cette marche aléatoire.

2. Partant de la tour (15), combien de temps la marche aléatoire met-elle, en moyenne, à y revenir ?

3. Partant de la tour (15), combien de fois la marche visite-t-elle, en moyenne, la tour (65) avant de revenir pour la première fois à son point de départ ?

4. Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire. On note $M = \left\{(15),(16),(25),(26)\right\}$. La quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_M(X_i)$$

admet-elle sous $\mathbb{P}_{(15)}$ une limite presque sûre lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

5. Est-il vrai que pour toute fonction f à valeurs réelles sur l'ensemble des sommets de notre graphe, la quantité

$$\mathbb{E}_{(15)}[f(X_n)]$$

admet une limite lorsque n tend vers l'infini ? Si oui, quelle est cette limite ? Si non, y a-t-il une quantité similaire qui admette une limite pour toute fonction f ?

—————— Fin du sujet ——————